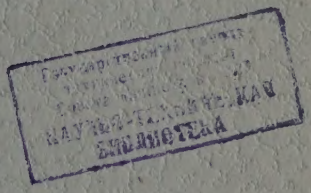
АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ VI
ВЫПУСК
3



1961
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том VI *1961* *Выпуск 3*

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Бернштейн С. Н., ***Гнеденко Б. В.***, ***Золотарев В. М.*** (ответственный секретарь), ***Колмогоров А. Н.*** (главный редактор), ***Королюк В. С.***, ***Линник Ю. В.***, ***Прохоров Ю. В.*** (зам. главного редактора), ***Сарымсаков Т. А.***, ***Смирнов Н. В.***

СОДЕРЖАНИЕ

Мешалкин Л. Д. О приближении распределений сумм неограниченно-делимыми законами 257
Meshalkin L. D. On Approximations of Distribution Function of Sums by Infinitely Divisible Laws 275
Севастьянов Б. А. Условия вырождения ветвящихся процессов с диффузией . 276
Sevastjanov B. A. The Extinction Conditions for Branching Processes with Diffusion 286
Скороход А. В. Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами 287
Skorohod A. V. Stochastic Equations for Diffusion Processes in a Bounded Region 298
Филиппов А. Ф. О распределении размеров частиц при дроблении 299
Filippov A. F. Über das Verteilungsgesetz der Grössen der Teilchen bei Zerstückelung 318

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Большев Л. Н. Уточнение неравенства Крамера — Рао 319
Bolshev L. N. The Refinement of the Cramér — Rao Inequality 326
Волков И. С. Анализ некоторых предельных теорем для больших уклонений . 327
Volkov I. S. Analysis of Some Limit Theorems for Large Deviations . . . 329
Золотарев В. М. Об асимптотическом поведении одного класса безгранично-делимых законов распределения 330
Zolotarev V. M. On the Asymptotic Behavior of a Class of Infinitely Divisible Laws 334
Королюк В. С. Об асимптотике некоторых функционалов в решетчатой схеме блуждания 334
Koroljuk V. S. The Asymptotes of Several Functionals in a Lattice Random Walk 341
Кордонский Х. Б. Распределение числа дефектных единиц в партиях изделий . 342
Kordonsky H. B. The Distribution of the Number of Defective Hems in Lots . 349
Розанов Ю. А. О применимости центральной предельной теоремы к стационарным процессам после их прохождения через линейный фильтр 349
Rozanov Yu. A. On the Applicability of the Central Limit Theorem to Stationary Processes Passed Through a Linear Filter 350
Рохлин В. А. Об энтропии автоморфизма компактной коммутативной группы . 351
Rohlin V. A. On the Entropy of Automorphism of a Commutative Compact Group 352
Шалаевский О. В. Краткое доказательство неравенства Крамера — Рао . . 352
Shalayevsky O. V. A Short Proof of the Cramér — Rao Inequality 353
Чибисов Д. М. О критериях согласия, основанных на выборочных промежутках . 354
Chibisov D. M. On the Tests of fit Based on Sample Spacings 358
Резюме докладов, сделанных на заседаниях семинара кафедры теории вероятностей Московского университета 359
Summary of Papers Presented at the Probability Research Seminar, Moscow University 359
Резюме докладов, сделанных на заседаниях секции теории вероятностей и математической статистики Московского математического общества (ноябрь—декабрь 1960 г.) 365
Summary of Papers Presented at the Sessions of the Probability and Statistics Section of Moscow Mathematical Society (November — December, 1960) . 365

Адрес редакции: Москва, В—233, МГУ, Мех.-матем. факультет, тел. В 9-14-03

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ом VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1961

Государственный научно-
технический комитет
Совета Министров
НАУЧНО-ТЕХНИЧ
БИБЛИОТЕКА

О ПРИБЛИЖЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕОГРАНИЧЕННО-ДЕЛИМЫМИ ЗАКОНАМИ

Л. Д. МЕШАЛКИН

Введение

Для любых двух функций распределения (ф. р.) $F(x)$ и $G(x)$ положим

$$\rho(F, G) = \sup_x |F(x) - G(x)|.$$

Пусть $\mathfrak{G}$ — совокупность неограниченно-делимых (н. д.) законов и пусть

$$\rho(F, \mathfrak{G}) = \inf_{G \in \mathfrak{G}} \rho(F, G).$$

А. Н. Колмогоровым было доказано [1], что найдется такая абсолютная постоянная C_1, что

$$\psi_1(n) = \sup_F \rho(F^n, \mathfrak{G}) < C_1 n^{-1/3}$$

(здесь и в дальнейшем степени ф. р. понимаются в смысле свертки). В 1959 г. Ю. В. Прохоровым был получен более сильный результат [2]: найдутся такие $C_2 > 0$ и C_3, что

$$C_2 (n \ln n)^{-1} < \psi_1(n) < C_3 (n)^{-1/3} (\ln n)^2, \tag{1}$$

причем нижняя граница была найдена с помощью оценки функции

$$\psi_2(n) = \sup_{0 \leqslant p \leqslant 1} \rho(F_p^{*n}, \mathfrak{G}) < \psi_1(n)$$

снизу (здесь и в дальнейшем $F_p(x) = 0,\ 1-p,\ 1$, если $x \leqslant 0,\ 0 < x \leqslant 1$ и $1 < x$ соответственно; звездочка $*$ означает, что ф. р. подвергнута симметризации: $F^*(x) = F(x) * [1 - F(-x+0)]$).

В настоящей работе показано, что если $\psi_2(n)$ заменить

$$\psi_3(n) = \sup_{0 \leqslant p \leqslant 1} \rho(F_p^n, \mathfrak{G}) \leqslant \sup_F \rho(F^n, \mathfrak{G}) = \psi_1(n),$$

то нижняя оценка может быть улучшена. В §§ 1—3 доказывается

Теорема 1. *Для любой функции* $u(n) \to 0\ (n \to \infty)$ *найдется такое* $N_0 = N_0(u)$, *что для* $n > N_0$

$$\psi_3(n) > n^{-\frac{2}{3}} (\ln n)^{-3\frac{1}{2}} u(n) = z(n). \tag{2}$$

Схема доказательства теоремы 1 опубликована в [3], а в [4] указаны для ψ_2 и ψ_3 лучшие по сравнению с (1) оценки сверху, которые вместе

с (1) и (2) дают:

$$C_2 (n \ln n)^{-1} < \psi_2 (n) < C_4 n^{-1} \text{ и } C_5 n^{-\frac{2}{3}} (\ln n)^{-4} < \psi_3 (n) < C_6 n^{-\frac{2}{3}}.$$

Пусть $\mathfrak{N}(l)$ — совокупность ф. р. случайных величин ζ таких, что $|\zeta| \leqslant$ и $\mathbf{D}\zeta = 1$, и пусть

$$\psi(n, l) = \inf_{F \in \mathfrak{N}(l)} \rho(F^n, \Phi).$$

На совещании по предельным теоремам теории вероятностей (г. Ужгоро 1959) А. Н. Колмогоровым была поставлена задача исследовать в завис мости от l асимптотику $\psi(n, l)$ при $n \to \infty$. В решении этой задачи важну роль играют верхние грани L_k таких значений l, что для всех $F \in \mathfrak{N}(l)$ найдется ни одного н. д. закона G, первые k семиинвариантов которо совпадали бы с соответствующими семиинвариантами F. Очевидно, чт $1 = L_1 = L_2 = L_3 < L_4 \leqslant L_5 \ldots \leqslant L_k \leqslant L_{k+1} \leqslant \ldots$ Оценим L_{2k}. Пус $l > L_{2k}$, тогда в $\mathfrak{N}(l)$ найдется такая ф. р., первые $2k$ семиинвариант которой совпадают с соответствующими семиинвариантами некоторого н. распределения. Известно, что четные семиинварианты любого н. д. зако не могут быть отрицательными, поэтому моменты симметризованной ф. $F^*(x\sqrt{2})$ не меньше соответствующих моментов нормально распределенн с параметрами (0,1) величины. В частности, это утверждение верно и д. момента α_{2k} порядка $2k$: $\alpha_{2k} \geqslant (2k-1)!!$. С другой стороны, ф. $F^*(x\sqrt{2}) \in \mathfrak{N}(\sqrt{2}l)$, поэтому $\alpha_{2k} \leqslant (\sqrt{2}l)^{2(k-1)}$. Из сравнения этих дв неравенств получаем, что

$$l \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} ((2k-1)!!)^{\frac{1}{2(k-1)}}.$$

Но l можно выбрать как угодно близким к L_{2k}, следовательно, эта оценка имеет место и для L_{2k}.

В § 4 ψ оценивается сверху. Там же показывается, что $L_k < \infty$ $L_{2k} = L_{2k+1}$. Вывод оценки ψ снизу в § 6 имеет много общего с доказ тельством теоремы 1. Результаты этих двух параграфов подытоживает

Теорема 2. *Для любых* $1 < l < \infty$, *целого* $k \geqslant 1$ *и произвольной фун ции* $0 < u(n) \to 0$ $(n \to \infty)$ *найдется такое* $N(l, u)$, *что для* $n > N(l,$

$$\psi(n, l) > n^{-k+1} (\ln n)^{-2k-\frac{1}{2}} u(n) = z(n.k), \text{ если } l < L_{2k},$$
$$\psi(n, l) < n^{-k} u(n)^{-1}, \text{ если } l > L_{2k}.$$

Поскольку $L_4 > 1$, из этой теоремы следует, что существуют как угодн гладкие абсолютно непрерывные ф.р., имеющие конечные моменты все порядков, причем

$$\rho(F^n, \Phi) > C_7 n^{-1} (\ln n)^{-5},$$

где $C_7 > 0$. Из теоремы 2 следует, что для любого $1 < l < \infty$, отличног от всех L_{2k} $(k = 2, 3, 4 \ldots)$, существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\ln \psi(n, l)|}{\ln n} = a(l),$$

причем, если $L_{2k} < l < L_{2(k+1)}$, то $a(l) = k$.

Условимся в дальнейшем обозначать ф.р. прописными латинскими буквами $F, G, V, W, \ldots$ с индексами, а строчными латинскими буквами с теми же индексами обозначать соответствующие характеристические функции (х.ф.). (Например, $F_p^n(x)$ — ф.р., $f_p^n(t)$ — соответствующая ей х.ф.) Пусть также $\mathfrak{G}_M$ означает совокупность таких ф.р. G, логарифм х.ф. которых можно представить в виде *

$$\ln g(t) = i\gamma t + \int_{-M}^{M} (e^{itu} - 1 - itu)\frac{dK(u)}{u^2}, \tag{3}$$

где γ — действительное число, а $K(u)$ — неубывающая функция ограниченной вариации (в дальнейшем мы будем говорить, что н.д. закон $G \in \mathfrak{G}_M$ имеет спектр, ограниченный M).

Пусть далее $0 < C_1, C_2, \ldots$ — абсолютные постоянные; $\alpha = \alpha(n)$ — произвольная функция, удовлетворяющая следующим двум условиям: а) $\alpha < \ln n$, б) $\alpha \to \infty$ $(n \to \infty)$; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ (функция нормального распределения); $E(x)$ — функция вырожденного распределения ($E = 0$, если $x \leqslant 0$ и $E = 1$, если $x > 1$); $Q_F(l) = \sup_x (F(x + l) - F(x))$. Все прочие обозначения имеют силу только в пределах того или иного доказательства.

Статья представляет собой изложение результатов двух глав кандидатской диссертации, выполненной под руководством Андрея Николаевича Колмогорова, которому я благодарен за постановку задачи и за все то внимание, которое он мне оказывал. Существенную помощь в написании работы мне оказали беседы с Юрием Васильевичем Прохоровым. Я глубоко признателен ему за них.

§ 1. Схема доказательства теоремы 1

В этом и следующих двух параграфах: а) $p = n^{-2/3}$; б) $M = n^{1/6}(\ln n)^{1/2}\alpha$; в) $M_1 = M\alpha \ln n$; г) $\varkappa_k$ — семиинвариантны G. Будем говорить, что для G выполняется условие (A_n), если $\rho(F_p^n, G) < p$ и $G \in \mathfrak{G}_M$.

Поскольку $\rho(F_p^n, \mathfrak{G}) \leqslant \psi_3(n)$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что для любой функции $u(n) \to 0$ $(n \to \infty)$ и для всех n, начиная с некоторого $N_0(u)$,

$$\rho(F_p^n, \mathfrak{G}) > z(n). \tag{4}$$

Основная трудность доказательства заключается в том, что о произвольном н.д. законе ничего не известно, кроме представления его х.ф. ([5] § 18), поэтому сначала надо максимально сузить совокупность н.д. законов, сравниваемых с F_p^n при оценке $\psi_3(n)$ снизу. Как следует из приводимой ниже леммы, при этом можно ограничиться законами, для которых выполняется (A_n).

---

* Под интегралом $\int_a^b$ будем понимать $\int_{a-0}^{b-0}$, т. е. нижний предел включается в пределы интегрирования, а верхний — нет.

Лемма 1. *Найдется* $N_1 = N_1(\alpha)$ *такое, что для* $n > N_1$

$$\rho(F_p^n, \Phi_M) < 13(\rho(F_p^n, \Phi) + n^{-2}).$$

(Леммы 1, 3, 4, 5, 6 будут доказаны в § 2). В дальнейшем нам потребуется

Лемма 2 [6]. *Если* $\xi_i (i = 1, 2, \ldots)$ *независимы и одинаково распределены, причем* $|\xi_i| \leqslant l$, $\mathbf{M}\xi_i = 0$, $\mathbf{D}\xi_i = \sigma^2 < \infty$, *и если* $s_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ *то для* $x > 0$

$$\mathbf{P}\{s_n < -x\} \leqslant \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{4n\sigma^2}}, & xl \leqslant n\sigma^2, \\ e^{-\frac{x}{4l}}, & xl > n\sigma^2. \end{cases}$$

Из леммы 2, в частности, следует, что для $x > 0$

$$\max\{F_p^n(np - x),\ 1 - F_p^n(np + x)\} \leqslant \exp\left\{-\frac{x}{4(1-p)} \min\left(1, \frac{x}{np}\right)\right\}. \quad (5)$$

Оказывается, что для ф.р., удовлетворяющих (A_n), справедлив некоторый аналог этой формулы.

Лемма 3. *Найдется* $N_2 = N_2(\alpha)$ *такое, что если при* $n > N_2$ *ф.р.* G *удовлетворяет условию* (A_n), *то для* $x > M_1$

а) $G^*(-x) < \exp\left\{-\frac{x}{2M}\right\}$,

б) $\max\{G(\varkappa_1 - x),\ 1 - G(\varkappa_1 + x)\} < \exp\left\{-\frac{x}{2M}\right\}$.

При доказательстве этой леммы сначала оценивается дисперсия, соответствующая $G^*(x)$; полученная оценка с помощью экспоненциального усиления неравенства Чебышева используется для доказательства утверждений а) и б).

Распределения, удовлетворяющие (A_n), не обязательно целочисленны, однако, как следует из приводимой ниже леммы, для больших значений n они очень близки к целочисленным распределениям.

Лемма 4. *Найдется* $N_3 = N_2(\alpha)$ *такое, что если при* $n > N_3$ *для* $G(x)$ *выполняется* (A_n), *то* $g(t)$ *представима в виде*

$$g(t) = \exp\left\{i\widetilde{\gamma}t + \sum_k (e^{ith} - 1)\, q_k + \int_{-M}^{M} (e^{itu} - 1)\, d\widetilde{K}(u)\right\}, \quad (6)$$

где $\widetilde{\gamma}$ *— целое,* $q_k \geqslant 0$ *и* $\widetilde{K}(u)$ *— неубывающая функция, причем*

$$\int_{-M}^{M} d\widetilde{K}(u) < n^{\frac{1}{2}} (\ln n)^3. \quad (7)$$

Оказывается также, что математические ожидания, соответствующие ф.р. G, удовлетворяющей (A_n) и F_p^n, почти совпадают.

Лемма 5. *Найдется* $N_4 = N_4(\alpha)$ *такое, что если при* $n > N_4$ *для* G *выполняется* (A_n), *то*

$$|\varkappa_1 - np| < n^{\frac{1}{2}} (\ln n)^4. \quad (8)$$

Все сведения о G, удовлетворяющих (A_n), содержащиеся в леммах 3—5, позволяют показать, что нельзя добиться одновременного хорошего

приближения второго и четвертого моментов F_p^n соответствующими моментами закона, удовлетворяющего (A_n).

Лемма 6. *Найдется* $N_5 = N_5(\alpha)$ *такое, что если при* $n > N_5$ *для* G *выполняется* (A_n) *и*

$$|\varkappa_2 - np(1-p)| \leqslant \frac{1}{2} np^2, \tag{9}$$

то

$$|\varkappa_4 - np| > \frac{1}{5}. \tag{10}$$

Доказательство этой леммы основано на том, что если (10) не имеет места, то при выполнении условий (8) и (9) для н. д. закона с х. ф. (6) имеет место неравенство $|\varkappa_3 - np| > \frac{1}{2}$. Для больших n это противоречит предположению о выполнимости (A_n).

Из леммы 6 следует, что если G для $n > N_5$ удовлетворяет (A_n), то возможны лишь три следующих случая:

1. $\varkappa_6 \geqslant 2np$; (11)
2. $\varkappa_6 < 2np$, $|\varkappa_4 - np| > \frac{1}{5}$; (12)
3. $\varkappa_6 < 2np$, $|\varkappa_4 - np| \leqslant \frac{1}{5}$, $|\varkappa_2 - np(1-p)| > \frac{1}{2} np^2$. (13)

Этот факт и используется в § 4 для доказательства теоремы 1.

§ 2. Доказательство лемм 1, 3, 4, 5 и 6

Доказательство леммы 1. Пусть $\delta = \delta(n) = \rho(F_p^n, \mathfrak{G})$, и пусть $G(x) = G_n(x)$ — такая последовательность н. д. законов, что

$$\delta \leqslant \rho(F_p^n, G) < \delta + n^{-2}. \tag{14}$$

Функцию $G(x)$ можно представить в виде $G = V_1 * V_2 * W$, где

$$v_1(t) = \exp\left\{\int_{-\infty}^{-M} (e^{itu} - 1)\, dK(u)\right\};$$

$$v_2(t) = \exp\left\{\int_{M}^{\infty} (e^{itu} - 1)\, dK(u)\right\};$$

$$w(t) = \exp\left\{i\gamma t + \int_{-M}^{M} (e^{itu} - 1 - itu)\frac{dK(u)}{u^2}\right\}.$$

Ниже будет показано, что найдется $N_1 = N_1(\alpha)$ такое, что для $n > N_1$

$$\rho(F_p^n, W) < 13(\delta + n^{-2}), \tag{15}$$

откуда и будет следовать утверждение леммы. Положим

$$\Delta_1 = \Delta_1(n) = \int_{-\infty}^{-M} dK(u); \quad \Delta_2 = \Delta_2(n) = \int_{M}^{\infty} dK(u); \quad \Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2);$$

и пусть для определенности $\Delta_1 \geqslant \Delta_2$ (т. е. $\Delta = \Delta_1$). Функцию V_1 всегда

можно представить в виде $V_1 = V_3 * V_4$, где

$$v_k(t) = \int_{-\infty}^{-M} (e^{itu} - 1)\, dK_k(u) \quad (k = 3,\ 4),$$

причем

$$\int_{-\infty}^{-M} dK_3(u) = \Delta_3 = \begin{cases} \Delta, & \Delta < \ln 2, \\ \ln 2, & \Delta \geqslant \ln 2. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$V_3(x) = e^{-\Delta_3} E(x) + (1 - e^{-\Delta_3}) V_5(x).$$

Все изменение V_5 сосредоточено на $(-\infty, -M)$, а поэтому $Q_{V_5}(M) = e^{-\Delta_3}$. Так как при композиции распределений концентрация Q не возрастает, то

$$Q_G(M) \leqslant Q_{V_1}(M) \leqslant Q_{V_3}(M) = e^{-\Delta_3} = \max\left(\frac{1}{2},\ e^{-\Delta}\right). \tag{16}$$

С другой стороны, $\rho(W,\ G) \leqslant \rho(W,\ V_1 * W) + \rho(V_1 * W,\ G) \leqslant 2(1 - e^{-\Delta})$, поэтому

$$\rho(F_p^n,\ W) \leqslant \rho(F_p^n,\ G) + \rho(W,\ G) < \delta + n^{-2} + 2(1 - e^{-\Delta}). \tag{17}$$

Возможны два случая:

$$\delta > \frac{1}{4}(1 - e^{-\Delta}) - \frac{3}{2n^2} = b(\Delta) \quad \text{и} \quad \delta \leqslant b(\Delta). \tag{18}$$

В первом случае (15) имеет место в силу (17). Во втором случае согласно (5) найдется $N_6 = N_6(\alpha)$ такое, что для $n > N_6$

$$Q_{F_p^n}(M) > 1 - n^{-2}. \tag{19}$$

Из (14), (16), (19) следует, что для $n > N_6$

$$\delta + n^{-2} > \rho(F_p^n,\ G) > \frac{1}{2}\left[1 - \max\left(\frac{1}{2},\ e^{-\Delta}\right) - n^{-2}\right]. \tag{20}$$

Так как $\delta = o(1)$, то и $\Delta = o(1)$. Пусть для $n > N_7$ $\Delta < \ln 2$. Из неравенств (18), (20) следует, что для $n > N_1 = \max(N_6,\ N_7)$

$$\frac{1}{4}(1 - e^{-\Delta}) > \rho(F_p^n,\ G) + \frac{1}{2}n^{-2} > \frac{1}{2}(1 - e^{-\Delta}),$$

что невозможно. Следовательно, для $n > N_1$ возможен только случай $\delta > b(\Delta)$, а в этом случае лемма верна.

Доказательство леммы 3. Выберем N_2 так, чтобы было $\alpha > 10^8$ для $n > N_2$, тогда

$$p < \frac{1}{144},\ 2np(1 - p) > (5400)^2, \tag{21}$$

$$\alpha > \frac{2eb(n)}{\ln n}, \text{ где } b(n) = 10^7(\ln M + 2)/\ln 2. \tag{22}$$

Пусть далее при $n > N_2$ для G выполняется (A_n), тогда $\ln g(t)$ имеет вид (3) с $\gamma = \varkappa_1$. Не нарушая общности, будем считать, что все изменение функции $K(u)$ сосредоточено на полуинтервале $[-M,\ M]$.

Воспользовавшись экспоненциальным усилением неравенства Чебышева, меем для $x>0$, $a>0$ и $\Delta=\int\limits_{-M}^{M} dK(u)$

$$e^{ax}Q^*(-x)\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ay}dG^*(y)=\exp\left\{2\int\limits_{-M}^{M}[\operatorname{ch}(au)-1]\frac{dK(u)}{u^2}\right\}\leqslant\exp\{a^2\Delta e^{aM}\},\quad(23)$$

$$e^{ax}\max\{G(x_1-x);\ 1-G(x_1+x)\}\leqslant$$

$$\leqslant\max\left\{e^{ax_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ay}dG(y);\ e^{-ax_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ay}dG(y)\right\}=$$

$$=\max\left\{\exp\left[\int\limits_{-M}^{M}(e^{-au}-1+au)\frac{dK(u)}{u^2}\right];\right.$$

$$\left.\exp\left[\int\limits_{-M}^{M}(e^{au}-1-au)\frac{dK(u)}{u^2}\right]\right\}\leqslant\exp\left\{\frac{a^2\Delta}{2}e^{aM}\right\}.\quad(24)$$

Если бы для Δ имела место оценка

$$\Delta\leqslant M^2b(n),\quad(25)$$

о при $a=1/M$ из (22) — (25) и следовало бы утверждение леммы. Дока-кем (25). Для этого рассмотрим ф. р. $V_k(x)$ $(k=0,\ 1\ldots)$, х. ф. которых меют вид:

$$v_0(t)=\exp\left\{2\int\limits_{-1}^{1}(\cos tu-1)\frac{dK(u)}{u^2}\right\},\ \text{если}\ k=0,$$

$$v_k(t)=\exp\left\{2\int\limits_{-2^k}^{-2^{k-1}}(\cos tu-1)\frac{dK(u)}{u^2}+2\int\limits_{2^{k-1}}^{2^k}(\cos tu-1)\frac{dK(u)}{u^2}\right\},\ \text{если}\ k\geqslant 1.$$

Очевидно, что*

$$\boxed{*}_k V_k(x)=G^*(x).\quad(26)$$

Если бы для каждого k Δ_k — дисперсия $V_k(x)$ — удовлетворяла неравенству

$$\Delta_k\leqslant\max(m\cdot 2^{2k},\ 16\,np),\quad(27)$$

де $m=5\cdot 10^6$, то для Δ имела бы место оценка (25). В самом деле, поскольку дисперсия суммы независимых слагаемых равняется сумме их дисперсий, из (26) следует, что

$$2\Delta=\sum_k\Delta_k\leqslant\left(\frac{\ln M}{\ln 2}+2\right)\max(m\cdot(2M)^2,\ 16\,np)\leqslant 2M^2b(n).$$

Допустим, что для хотя бы одного k (27) не имеет места. Пусть, например,

$$\Delta_l>\max(m\cdot 2^{2l},\ 16\,np).\quad(28)$$

Обозначим β_u и γ_u соответственно абсолютные моменты и семиинварианты

* $\boxed{*}$ — операция свертки.

симметричного н. д. закона W такого, что $W^m = V_l$, тогда (см. [5] § 40)

$$\frac{\beta_3}{\gamma_2^{\frac{3}{2}}} = \left\{\frac{\beta_4}{\gamma_2^2}\right\}^{3/4} = \left\{\frac{\gamma_4 + 3\gamma_2^2}{\gamma_2^2}\right\}^{3/4} \leqslant \left\{\frac{m}{\Delta_l} 2^{2l} + 3\right\}^{3/4} < 4.$$

Согласно известной теоремы Эссеена ([5] § 40 или [7]) для любого ра пределения $F(x)$ с нулевым математическим ожиданием, дисперсией σ^2 конечным абсолютным третьим моментом β

$$\rho(F^n(\sigma\sqrt{n}x),\ \Phi(x)) \leqslant 7{,}5\,\frac{\beta}{\sigma^3\sqrt{n}}. \tag{29}$$

Положив в нашем случае $F = W$ и $n = m$, получим

$$\rho(V_l(\sqrt{\Delta_l}x),\ \Phi(x)) \leqslant 7{,}5\frac{\beta}{\gamma_2^{\frac{3}{2}}\sqrt{m}} < \frac{1}{72}. \tag{30}$$

Обозначим $W_l(x) = \boxed{*}_{k\neq l} V_k(x)$, $\tau = \sqrt{np(1-p)}$. С одной стороны, для выполняется (A_n) и, следовательно, согласно (21), имеем

$$|F_p^{*n}(\tau) - G^*(\tau)| \leqslant 2\rho(F_p^n,\ G) \leqslant 2p < \frac{1}{72}. \tag{31}$$

С другой стороны, согласно (21), (26), (28), (29) и (30)

$$|F_p^{*n}(\tau) - G^*(\tau)| \geqslant \left|\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\right| - \left|F_p^{*n}(\tau) - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| -$$

$$- \left|G^*(\tau) - W_l * \Phi\left(\frac{\tau}{\sqrt{\Delta_l}}\right)\right| - \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Phi\left(\frac{\tau - y}{\sqrt{\Delta_l}}\right) - \Phi\left(-\frac{y}{\sqrt{\Delta_l}}\right)\right) dW_l(y)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-1/4} - \frac{7{,}5}{\sqrt{2np(1-p)}} - \frac{1}{72} - \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} > \frac{1}{36}. \tag{32}$$

Из несовместимости неравенств (31) и (32) вытекает, что предположени (28) неверно, т. е. для любого k имеет место неравенство (27). Лемм доказана.

Доказательство* леммы 4. Поскольку при $n \to \infty$ d-максимальный скачок ф. р. F_p^n есть величина порядка $n^{-1/6}$ и

$$b(n) = 4p(M_1 + 1) + 2\exp\left\{-\frac{1}{2}(\ln n)\alpha\right\} = o(n^{-1/2}(\ln n)^4),$$

найдется $N_3 \geqslant N_2$ такое, что для $n > N_3$: а) $d > p$, б) $b(n) < n^{-1/2}(\ln n)^4 < 1/10$.

Пусть для $n > N_3$ G удовлетворяет (A_n). Очевидно, что в этом случа G не имеет нормальной компоненты и, следовательно, $\ln g(t)$ можно пред ставить в виде

$$\ln g(t) = i\gamma t + \sum_{k=-\infty}^{\infty}(e^{itk} - 1)q_k + \int_{-M}^{M}(e^{itu} - 1 - itu)\frac{dK(u)}{u^2},$$

где $K(u)$ — функция ограниченной вариации, непрерывная в целых точках

* Доказательство этой леммы принадлежит Ю. В. Прохорову. Оно заметно короч первоначально предложенного мною.

В самом деле, если бы это было не так, то ф. р. G была бы непрерывна и поэтому $\rho(F_p^n, G) = d$. Но в силу выбора $N_3 d > p$, что противоречит условию (A_n).

Оценим интеграл $\delta = \int\limits_{-M}^{M} \frac{dK(u)}{u^2}$. Условие (A_n) накладывает довольно жесткое ограничение на приращения $G^*(x)$ в нецелых точках. А именно, в силу выбора N_3 и неравенства а) леммы 3

$$\Delta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{G^*(k+1) - G^*(k+0)\} \leqslant 2\rho(F_p^n, G) \cdot 2(M_1+1) + \\ + 2G^*(-M_1) < b(n) < n^{-1/2}(\ln n)^4 < \frac{1}{10}. \tag{33}$$

Из (33) следует, что для любого целого k $1 \geqslant g^*(2k\pi) > 1 - \Delta$, откуда

$$2\int\limits_{-M}^{M} (1 - \cos(2k\pi u)) \frac{dK(u)}{u^2} < \ln(1-\Delta) < 2\Delta. \tag{34}$$

Пусть L — целое число. Подставив в (34) все k — от $-L$ до L, просуммировав получившиеся неравенства и разделив обе части суммы на $2L+1$, получаем

$$\int\limits_{-M}^{M} \left(1 - \frac{\sin((2L+1)\pi u)}{(2L+1)\sin \pi u}\right) \frac{dK(u)}{u^2} < \Delta. \tag{35}$$

Пусть $I(\varepsilon) = [-M, M) \setminus \bigcup\limits_k [k-\varepsilon, k+\varepsilon)$. Поскольку в (35) подынтегральная функция всегда неотрицательна, для любого $0 < \varepsilon < 1/2$ имеем

$$\int\limits_{I(\varepsilon)} \left(1 - \frac{\sin((2L+1)\pi u}{(2L+1)\sin \pi u}\right) \frac{dK(u)}{u^2} < \Delta.$$

Переходя к пределу при $L \to \infty$, получаем $\int\limits_{I(\varepsilon)} \frac{dK(u)}{u^2} < \Delta$, откуда непосредственно следует, что $\delta \leqslant \Delta$.

Положим

$$\widetilde{K}(z) = \int\limits_{-M}^{z} \frac{dK(u)}{u^2}, \quad \widetilde{\gamma} = \gamma - \int\limits_{-M}^{M} \frac{dK(u)}{u}$$

и докажем, что $\widetilde{\gamma}$ — целое число. Распределение с х. ф.

$$v(t) = \exp\left\{\int\limits_{-M}^{M} (e^{itu} - 1)\, d\widetilde{K}(u)\right\}$$

по вариации близко к целочисленному; G также по вариации близко к целочисленному, следовательно, и распределение с х. ф.

$$w(t) = \exp\left\{i\widetilde{\gamma}t + \sum (e^{itk} - 1)\, q_k\right\}$$

по вариации близко к целочисленному. Последнее же возможно лишь при целом $\widetilde{\gamma}$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 5. По определению M_1, а также в силу (5) и леммы 3, найдется N_4 такое, что для $n > N_4$:

а) $\int\limits_{-\infty}^{np-M_1} F_p^n(x)\,dx + \int\limits_{np+M_1}^{\infty} (1 - F_p^n(x))\,dx < n^{-2}$;

б) для любого G, удовлетворяющего (A_n),

$$\int_{-\infty}^{\varkappa_1 - M_1} G(x)\,dx + \int_{\varkappa_1 + M_1}^{\infty} (1 - G(x))\,dx < n^{-2};$$

в) $2(1-p)^{-1}(pM_1 + n^{-2}) < n^{-1/2}(\ln n)^4$.

Пусть теперь при $n > N_4$ для G выполняется (A_n). Положим $d_1 = \min(\varkappa_1, np)$, $d_2 = \max(\varkappa_1, np)$, $A = d_1 - M_1$ и $B = d_2 + M_1$. Интегрируя по частям, получаем в силу а) и б)

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d(F_p^n(x) - G(x)) \right| \leqslant |t| \int_{-\infty}^{\infty} |F_p^n(x) - G(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant |t| \cdot \left\{ p(B-A) + \int_{-\infty}^{A} (F_p^n(x) + G(x))\,dx + \int_{B}^{\infty} (2 - F_p^n(x) - G(x))\,dx \right\} \leqslant$$

$$\leqslant |t| \cdot \{p(B-A) + 2n^{-2}\}. \qquad (36)$$

Разделив правую и левую части получившегося неравенства на t и переходя к пределу при $t \to 0$, имеем

$$|\varkappa_1 - np| \leqslant p(B-A) + 2n^{-2} = p|\varkappa_1 - np| + 2(pM_1 + n^{-2}),$$

откуда ввиду в) утверждение леммы следует непосредственно.

Доказательство леммы 6. Допустим, что лемма неверна, тогда найдется бесконечная последовательность ф. р. $G = G_{n_k}$ $(n_k \to \infty,\ k \to \infty)$, для каждой из которых при $n = n_k$ выполняются (A_n) и неравенство (9) и не выполняется неравенство (10). Из лемм 4 и 5 последовательно получаем $\widetilde{\gamma} \geqslant 1 + o(1)$.

$$\frac{1}{5} + o(1) > \varkappa_4 - \varkappa_2 = \Sigma k^2(k^2-1) + \int_{-M}^{-2} (u^2-1)u^2 d\widetilde{K}(u) +$$

$$+ \int_{2}^{M} u^2(u^2-1)\,d\widetilde{K}(u) + o(1); \qquad (37)$$

$$o(1) = \varkappa_2 - \varkappa_1 = \sum k(k-1)q_k - \widetilde{\gamma} + o(1) \leqslant 2q_{-1} - 1 + \frac{1}{5} + o(1);$$

поэтому $q_{-1} \geqslant \frac{2}{5} + o(1)$;

$$\varkappa_3 - np = \varkappa_3 - \varkappa_2 + o(1) = \Sigma k^2(k-1)q_k + \int_{-M}^{M} u^2(u-1)\,d\widetilde{K}(u) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{4}{5} + \frac{1}{5} + o(1),$$

следовательно,

$$|\varkappa_3 - np| > \frac{3}{5} + o(1); \qquad (38)$$

$$|\varkappa_5 - np| \leqslant |\varkappa_3 - np| + |\varkappa_3 - \varkappa_5| \leqslant |\varkappa_3 - np| +$$

$$+ \left| \Sigma k^3(k^2-1)q_k + \int_{-M}^{M} u^3(u^2-1)\,d\widetilde{K}(u) \right| \leqslant |\varkappa_3 - np| + \frac{1}{5} M(1 + o(1)), \qquad (39)$$

поэтому

$$|\varkappa_0 - np| \leqslant \frac{1}{5} M^2 (1 + o(1)). \tag{40}$$

Пусть $V(x)$ — ф. р. такая, что $V^n(x) = G(x)$. Положим $t_0 = 1/\alpha M$. Для $t \leqslant t_0$ последовательно получаем

$$\frac{f_p(t)}{v(t)} = \frac{1 + p(e^{it} - 1)}{1 + ipt - p\frac{t^2}{2} + o(pt_0^2)} = 1 + o(pt_0^2) = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$(f_p^{n-1}(t) + v(t) f_p^{n-2}(t) + \ldots + v^{n-1}(t)) = n(1 + o(1)) v^{n-1}(t) =$$
$$= e^{i(n-1)pt} n(1 + o(1)). \tag{41}$$

Из неравенств (8), (9), (37) — (40) следует, что

$$|f_p(t_0) - v(t_0)| > \frac{3}{5n} t_0^3 (1 + o(1)),$$

откуда, учитывая (41), получаем

$$|f_p^n(t_0) - g(t_0)| > \frac{3}{5} t_0^3 (1 + o(1)) \geqslant \frac{3}{5} n^{-1/2} (\ln n)^{-8} (1 + o(1)). \tag{42}$$

С другой стороны, из формул (8), (36) следует, что

$$|f_p^n(t_0) - g(t_0)| \leqslant 2t_0 p M_1 (1 + o(1)) = 2n^{-3/8} \ln n (1 + o(1)). \tag{43}$$

Неравенства (42) и (43) для больших значений n несовместимы. Следовательно, предположение о неправильности утверждения леммы опровергнуто.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Предположим, что (4) не имеет места. Тогда для некоторой функции $u(n) \to 0$ $(n \to \infty)$ найдется последовательность $n = n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$ такая, что

$$\rho(F_p^n, \mathfrak{G}) \leqslant z(n).$$

Не нарушая общности, можно считать, что $u(n) > (\ln n)^{-13}$. Положим теперь $\alpha = \alpha(n) = (u(n))^{\frac{1}{13}}$. Согласно лемме 1, для $n > N_1$ $\rho(F_p^n, \mathfrak{G}_M) = O(\rho(F_p^n, \mathfrak{G}) + n^{-2}) = o(z(n)\alpha)$. Отсюда следует, что найдется последовательность н. д. законов $G = G_n$ такая, что для каждого G_n выполняется (A_n) и

$$\rho(F_p^n, G) = o(z(n)\alpha). \tag{44}$$

Как уже было указано в § 1, если при $n > N_5$ для G выполняется (A_n), то для семиинвариантов G возможны лишь случаи (11) — (13). Поэтому среди $n = n_k$ можно выбрать хотя бы одну бесконечную подпоследовательность n_{k_j} такую, что для соответствующих ф. р. будет выполняться только одно из условий (11) — (13). Ниже будет показано, что какое бы из этих условий ни выполнялось при $n = n_{k_j} \to \infty$,

$$\rho(F_p^n, G) > C_8 z(n) \alpha (1 + o(1)). \tag{45}$$

Поскольку для больших значений n (44) и (45) несовместимы, отсюда и будет следовать утверждение теоремы.

Пусть $n \to \infty$, а $V(x)$ и t_0 определены так же, как при доказательстве леммы 6. Через δ_k будем обозначать разность k-моментов F_p^* и V^*. К разности $F_p^{*n} - G^*$ применим формулу Парсеваля

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (F_p^{*n} - G^*)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|f_p|^{2n} - |v|^{2n}}{t} \right)^2 dt.$$

Согласно лемме 3 и (5), имеем

$$D \leqslant \int_{-M_1}^{M_1} (F_p^{*n} - G^*)^2 dx + O(n^{-2}) \leqslant 8M_1 (\rho(F_p^n, G)^2 + O(n^{-2}). \quad (46)$$

Из равномерной сходимости $F_p^{*n}(x\sqrt{2np(1-p)})$, а следовательно и $G^*(x\sqrt{2np(1-p)})$, к $\Phi(x)$ в силу вещественности и неотрицательности $|f_p|^2$ и $|v|^2$ следует, что для $t \leqslant t_0$

$$||f_p|^{2n} - |v|^{2n}| > ||f_p|^2 - |v|^2| n(1 + o(1)).$$

Откуда вытекает, что

$$D \geqslant n^2 \int_{-t_0}^{t_0} \frac{(|f_p|^2 - |v|^2)^2}{t^2} dt (1 + o(1)). \quad (47)$$

Пусть для последовательности G выполняется (11). Из соотношения между моментами и семиинвариантами (см. [5] § 15) легко получить, что в этом случае

$$|\delta_6| > 2p(1 + o(1)). \quad (48)$$

В силу того, что $G \in \mathfrak{G}_M$, а также в силу леммы 4 имеем:

$$\varkappa_2 \leqslant \varkappa_4 (1 + o(1)) \leqslant \varkappa_6 (1 + o(1)); \ \varkappa_8 \leqslant M^2 \varkappa_6,$$

следовательно, для $t = ut_0$ $(-1 \leqslant u \leqslant 1)$

$$|f_p(t)|^2 - |v(t)|^2 = \sum_{k=1}^{3} \delta_{2k} \frac{(-t^2)^k}{(2k)!} + u^6 o(\delta_6 t_0^6). \quad (49)$$

Известно, что существует такая абсолютная постоянная C_9, что для любых $b_k (k = \overline{1; 10})$ $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |x^{11} - \sum\limits_{k=1}^{10} b_k x^k| > C_9$, поэтому из (47)—(49) следует, что

$$D \geqslant n^2 \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \int_{-x}^{x} \frac{(|f_p(t_0 u)|^2 - |v(t_0 u)|^2)^2}{t_0 u^2} du (1 + o(1)) \geqslant$$

$$\geqslant n^2 \frac{\delta_6^2}{(6!)^2} \cdot \frac{t_0^{11}}{11} \cdot C_9 (1 + o(1)) = C_{10} n^{-7/6} (\ln n)^{-11/2} \alpha^{-22} (1 + o(1)). \quad (50)$$

Если для последовательности G выполняется (12) или (13), то с помощью очевидного изменения только что приведенного доказательства полу-

чаем соответственно, что

$$D \geqslant C_{11} n^{-7/6} (\ln n)^{-7/2} \alpha^{-14} (1 + o(1)) \tag{51}$$

или

$$D \geqslant C_{12} n^{-7/6} (\ln n)^{-3/2} \alpha^{-6} (1 + o(1)). \tag{52}$$

Из (46), (50)—(52) следует (45). Теорема доказана.

§ 4. Оценка ψ сверху

В этом параграфе доказывается, что для любых фиксированных $k \geqslant 3$ и $l > L_k$ (k — целое)

$$\psi(n, l) = O\left(n^{-\frac{k-1}{2}}\right), \quad n \to \infty. \tag{53}$$

Доказательство приводится в два этапа. Сначала будет показано, что существуют $F \in \mathfrak{N}(l)$ и $G \in \mathfrak{G}$ такие, что

а) G имеет ограниченный спектр, т. е. найдется $M < \infty$ такое, что $G \in \mathfrak{G}_M$,

б) первые k моментов F и G совпадают,

в) $F(x)$ имеет абсолютно непрерывную компоненту,

г) $G(x)$ абсолютно непрерывна и $|G'(x)| < A < \infty$.

Затем оценивается $\rho(F^n, G^n)$. При этом оказывается, что при $n \to \infty$

$$\rho(F^n, G^n) = O\left(n^{-\frac{k-1}{2}}\right). \tag{54}$$

Так как $F \in \mathfrak{N}(l)$ и $G \in \mathfrak{G}$, то отсюда и будет следовать (53).

Для доказательства существования F и G, удовлетворяющих условиям а) — г), нам потребуются некоторые сведения о разрешимости степенной проблемы моментов.

Последовательность вещественных чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ будем называть положительно (неотрицательно) определенной в интервале $(-a, a)$, если для любого многочлена степени не выше k

$$P(x) = \sum_{u=0}^{k} A_u x^u \not\equiv 0, \quad P(x) \geqslant 0 \text{ для } x \in (-a, a)$$

функционал $Q(P) = \sum_{u=0}^{k} A_u \alpha_u > 0 \ (\geqslant 0)$. Квадратичную форму $\sum_{i,k=0}^{m} a_{i,k} x_i x_k$ будем называть положительно (неотрицательно) определенной, если для любых не равных одновременно нулю вещественных значений переменных $\sum_{i,k=0}^{m} a_{i,k} x_i x_k > 0 \ (\geqslant 0)$. Связь между положительно определенными последовательностями и формами устанавливает

Лемма 7* [8]. *Для того чтобы последовательность $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ была положительно (неотрицательно) определена в интервале $(-a, a)$, необ-*

* Для $a = \infty$ утверждение леммы следует из теоремы 1 на стр. 6 [8]; для $a < \infty$ — из теоремы 19 на странице 35 и замечания на стр. 36 той же работы.

ходимо и достаточно, чтобы две квадратичные формы (при $n = 2m$)

$$\sum_{i,k=0}^{m} \alpha_{i+k} x_i x_k \quad и \quad \sum_{i,k=0}^{m-1} \left(\alpha_{i+k} - \frac{1}{a^2} \alpha_{i+k+2} \right) x_i x_k \tag{55}$$

и две квадратичные формы (при $n = 2m - 1$)

$$\sum_{i,k=0}^{m-1} \left(\alpha_{i+k} + \frac{1}{a} \alpha_{i+k+1} \right) x_i x_k \quad и \quad \sum_{i,k=0}^{m-1} \left(\alpha_{i+k} - \frac{1}{a} \alpha_{i+k+1} \right) x_i x_k \tag{56}$$

были положительно (неотрицательно) определены.

Лемма* 8. *Для того чтобы существовала неубывающая функция $\sigma(x)$, удовлетворяющая уравнениям*

$$\alpha_k = \int_{-a}^{a} x^k a\sigma(x) \quad (k = \overline{1, n}),$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\alpha_k\}$ была неотрицательно определена в интервале $(-a, a)$.

Пусть $V(x)$ — такая ф. р., что последовательность

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 \ldots, \alpha_n, \text{ где } \alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dV(x), \tag{57}$$

положительно определена на всей числовой прямой (заметим, что для этого достаточно, например, чтобы $V(x)$ была непрерывна). Согласно лемме 7, при $n = 2m$ или $n = 2m + 1$ квадратичная форма

$$\sum_{i,k=0}^{m} \alpha_{i+k} x_i x_k \tag{58}$$

положительно определена. Напомним, что положительная определенность (58) эквивалентна (см. [8] стр. 6 или [9] стр. 248) положительности последовательных главных миноров матрицы $\| \alpha_{i+k} \|_{i,k=0}^{m}$; если изменить элементы этой матрицы достаточно мало, положительность последовательных главных миноров не нарушится. Поэтому найдется столь большое a, что квадратичные формы (55) при $n = 2m$ и квадратичные формы (56) при $n = 2m - 1$ будут положительно определены. Но тогда, согласно лемме 8, найдется ф.р. $W(x)$, все изменение которой сосредоточено на $(-a, a)$ и для которой $\alpha_k = \int_{-a}^{a} x^k dW(x) \; (k = \overline{1, n})$. Итак, нами доказана

Лемма 9. *Для каждой ф.р. $V(x)$, для которой ряд (57) положительно определен на $(-\infty, \infty)$, найдется ф.р. $W(x)$, все изменение которой сосредоточено на конечном интервале и первые n моментов которой совпадают с соответствующими моментами V.*

Следствие. Все $L_k < \ldots$. Для того чтобы в этом убедиться, доста-

* Для $a < \infty$ утверждение леммы следует из теоремы 1а—2а на стр. 48 [8]; для $a = \infty$ доказательство по существу аналогично доказательству теоремы 6 на стр. 51 той же работы.

точно взять в качестве $V(x)$ ф.р. произвольного непрерывного н.д. закона, имеющего k первых моментов, и воспользоваться леммой 9.

Пусть $l - L_k = 3\varepsilon$. Из определения L_k следует, что найдутся $rV \in \mathfrak{N}(L_k + \varepsilon)$ и $W \in \mathfrak{G}$ такие, что их k первых семиинвариантов совпадают Пусть далее W_1 — ф.р. н.д. закона с х.ф.

$$w_1(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{4} + \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}(\cos tu - 1)\,du\right\}.$$

Очевидно, что $W_1(x)$ можно представить в виде суммы двух ф.р.

$$W_1 = pW_2 + qW_3;\ (p, q > 0;\ p + q = 1),$$

причем все изменение W_2 сосредоточено на отрезке $[-1,1]$, а все изменение W_3 — вне этого отрезка. Поскольку W_1 — непрерывная ф.р., непрерывны W_2 и W_3. Согласно лемме 9, найдется ф.р. V_3, имеющая те же k первых моментов, что и W_3, но все изменение которой сосредоточено на $(-a, a)$, где $\varepsilon < a < \infty$. Положим

$$V_1(x) = pW_2(x) + qV_3(x);\ W_4(x) = W\left(\frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2}}\right) * W_1\left(\frac{a}{\varepsilon}x\right);$$

$$V_4(x) = V\left(\frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2}}\right) * V_1\left(\frac{a}{\varepsilon}x\right).$$

Очевидно, что $V_4 \in \mathfrak{N}(l - \varepsilon)$ и имеет абсолютно непрерывную компоненту. Кроме того, первые k семиинвариантов (моментов) V_4 совпадают с соответствующими семиинвариантами (моментами) W_4.

Поскольку у ф.р. W_4 существует дисперсия, равная единице, $\ln w_4(t)$ можно представить в виде

$$\ln w_4(t) = i\varkappa_1 t + \int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu} - 1 - itu)\frac{dK(u)}{u^2},$$

где $K(u)$ — ф.р.; $\varkappa_j$ — семиинвариант $W_4(u)$ порядка $j = \overline{2,k}$ — можно рассматривать как момент ф.р. $K(u)$ порядка $j-2$. Последовательность $\varkappa_2 = 1, \varkappa_3 \ldots \varkappa_k$ положительно определена на $(-\infty, \infty)$, поэтому, согласно лемме 9, найдется ф.р. $K_1(u)$ такая, что $\varkappa_j = \int_{-b}^{b} u^{j-2}dK_1(u)$, где $b < \infty$.

Но отсюда следует, что существует н.д. ф.р. $W_5(x)$, имеющая ограниченный спектр, первые k семиинвариантов которого совпадают с соответствующими семиинвариантами $W_4(x)$. Функции распределения

$$G(x) = W_5\left(\frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2}}\right) * W_1\left(\frac{a}{\varepsilon}x\right) \in \mathfrak{G} \text{ и}$$

$$F(x) = V_4\left(\frac{x}{\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2}}\right) * V_1\left(\frac{a}{\varepsilon}x\right) \in \mathfrak{N}(l),$$

как следует из построения V_4, W_5, V_1 и W_1, удовлетворяют условиям а) — г).

Для оценки $\rho(F^n, G^n)$ нам потребуется

Лемма 10 ([5] § 39 или [7]). *Пусть A, T и $\varepsilon > 0$ постоянные. Если*

1) $\int_{-\infty}^{\infty} |V(x) - W(x)|\, dx < \infty$, (59)

2) $\frac{d}{dx} W(x)$ *существует при всех* x *и* $\left|\frac{d}{dx} W(x)\right| < A$,

3) $\int_{-T}^{T} \left|\frac{v(t) - w(t)}{t}\right| dt = \varepsilon$,

то каждому числу $m > 1$ *соответствует конечное положительное число* $c(m)$, *зависящее только от* m, *такое, что*

$$\rho(V, W) \leqslant m\frac{\varepsilon}{2\pi} + c(m)\frac{A}{T}.$$

Положим $F^n = V$, $G^n = W$ и $n^{-(k-1)/2} = T$, тогда, так как F и G имеют конечную дисперсию, выполняется (59). Из г) следует, что

$$\left|\frac{d}{dx} W(x)\right| \leqslant \max_x \left|\frac{d}{dx} G(x)\right| < A. \tag{60}$$

Так как спектр G ограничен, $F \in \mathfrak{N}(l)$ и выполняется условие б), следует, что найдутся $\delta > 0$ C_{13} и $C_{14} > 0$ такие, что $|t| \leqslant \delta$

$$|f(t) - g(t)| < C_{13}|t|^{k+1}; \tag{61}$$

$$\max(|f(t)|, |g(t)|) < \exp\{-C_{14}t^2\}. \tag{62}$$

С другой стороны, из в) —г) следует, что

$$\sup_{|t|>\delta} \max(|f(t)|, |g(t)|) \leqslant C_{15} < 1.$$

Далее из (61) — (63) при $n \to \infty$ получаем

$$\int_{-T}^{T} \left|\frac{v(t) - w(t)}{t}\right| dt \leqslant n \int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(t) - g(t)}{t}\right| \{\max(|f|, |g|)\}^{n-1}\, dt +$$

$$+ \frac{2}{\delta} \int_{\delta<|t|<T} \max(|v(t)|, |w(t)|)\, dt = O\left(n^{-\frac{k-1}{2}}\right). \tag{64}$$

Соотношение (53) является следствием соотношений (59), (60), (64) и леммы 10.

В заключение этого параграфа покажем, что

$$L_{2k} = L_{2k+1}. \tag{65}$$

Из определения L_{2k} вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $F \in \mathfrak{N}(L_{2k} + \varepsilon)$ такое, что первые $2k$ семиинвариантов F совпадают с соответствующими семиинвариантами некоторого н.д. закона. Но тогда, согласно лемме 8, последовательность $\gamma_2 = 1, \gamma_3, \ldots, \gamma_{2k}$, где γ_j $(\gamma = \overline{2,2k})$ — j-й семиинвариант F неотрицательно определена в $(-\infty, \infty)$. А это, в свою очередь, согласно лемме 7, эквивалентно неотрицательной определенности последовательности $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{2k+1}$. Еще раз применяя лемму 8, отсюда находим, что существует н.д. закон такой, что первые $2k+1$ его семиинвариантов совпадают с соответствующими семиинвариантами F. Следовательно,

по определению $L_{2k+1} \leqslant L_{2k}+\varepsilon$, или ввиду произвольности ε $L_{2k+1} \geqslant L_{2k}$. Справедливость обратного неравенства $L_{2k} \leqslant L_{2k+1}$ очевидна, (65) доказано.

§ 5. Оценка ψ снизу

В этом параграфе l и $k \geqslant 2$ фиксированы, причем $l < L_{2k}$. Ниже будет показано, что в этом случае для любой функции $u(n) \to 0$ $(n \to \infty)$

$$Z(n, k) = 0(\psi(n, l)), \quad n \to \infty \tag{66}$$

Заметим, что из (53), (65) и (66) следует утверждение теоремы 2. Не нарушая общности, можно считать, что $u(n) > (\ln, n)^{-4k-1}$. Положим

$$\alpha = \alpha(n) = u(n)^{-\frac{1}{4k+1}}; \quad M = \sqrt{n \ln n}\,\alpha; \quad M_1 = M(\ln n)\,\alpha.$$

Пусть также $\varkappa_i$ и γ_i — i-е семиинварианты G и F соответственно, а Δ_i — разность моментов F и G порядка i. Если $l < L_{2k}$, то верны следующие леммы.

Лемма 11. *Найдется* $N_8 = N_8(\alpha)$ *такое, что для любого* $n > N_8$ *существуют* $F \in \mathfrak{N}(l)$ и $G \in \mathfrak{G}_M$, *для которых*

$$\rho(F^n, G^n) < 13(\psi(n, l) + n^{-k}).$$

Лемма 12. *Найдется* $N_9 = N_9(\alpha)$ *такое, что если при* $n > N_9$ *для* $G \in \mathfrak{G}_M$

$$\inf_{F \in \mathfrak{N}(l)} \rho(F^n, G^n) < n^{-k+1},$$

то для $x > M_1$

$$\max\{G^n(\varkappa_1 - x),\ 1 - G^n(\varkappa_1 + x)\} < \exp\left\{-\frac{x}{2M}\right\}.$$

Лемма 13. *Найдется* $N_{10} = N_{10}(\alpha)$ *такое, что для* $n > N_{10} F \in \mathfrak{N}(l)$

$$G \in \mathfrak{G}_M \text{ и } \rho(F^n, G^n) < n^{-k+1}(\ln n)^{-3}, \text{ то } |\varkappa_1 - \gamma_1| < n^{-k+\frac{1}{2}}.$$

Лемма 14. *Найдется* $\delta = \delta(k, l)$ *такое, что для любых* $F \in \mathfrak{N}(l)$ *и* $G \in \mathfrak{G}$

$$\max_{i \leqslant 2k} |\varkappa_i - \gamma_i| > \delta.$$

Доказательства лемм 11, 12, 13 лишь очевидными изменениями отличаются от доказательств лемм 1, 3, 5, поэтому доказательства лемм 11,12,13 мы опустим. Заметим здесь только, что в ходе доказательства леммы 12, как и при доказательстве леммы 3, получается оценка для $\varkappa_2$:

$$\varkappa_2 = O((\alpha \ln n)^2), \quad n \to \infty. \tag{67}$$

Доказательство леммы 14. Допустим, что лемма неверна. Тогда найдутся такие две последовательности $F = F_m \in \mathfrak{N}(l)$ и $G = G_m \in \mathfrak{G}$, для которых

$$\max_{i \leqslant 2k} |\varkappa_i - \gamma_i| \to 0, \quad m \to \infty. \tag{68}$$

Будем рассматривать $\mathfrak{N}(l)$ как метрическое пространство ф.р. с расстоянием, введенным П. Леви. $\mathfrak{N}(l)$ компактно (см. [5] § 9), поэтому из последовательности $F = F_m$ можно выбрать подпоследовательность $F = F_{m_l}$, сходящуюся при $m_l \to \infty$ к $V \in \mathfrak{N}(l)$. Обозначим семиинварианты V через $\overline{\gamma_i}$.

Из (68) следует, что $\varkappa_i \to \overline{\gamma}_i$ $(i=\overline{1,2k})$. Но тогда, согласно лемме 8, после довательность $\overline{\gamma}_i (i=\overline{2,2k})$ неотрицательно определена в $(-\infty, \infty)$. Следо вательно, существует н.д. закон, первые $2k$ семиинвариантов которого сов падают с соответствующими семиинвариантами V. Откуда по определени $L_{2k} \leqslant l$, что несовместимо с предположением $l < L_{2k}$. Лемма доказана

Доказательство соотношения (66). Допустим, что (66) не имеет места, т. е. найдется такая последовательность $n = n_m \to \infty$ $(m \to \infty)$, что

$$\psi(n, l) = O(z(n, k)). \tag{69}$$

Согласно лемме 11 в этом случае найдутся такие две бесконечные после довательности ф.р. $F = F_n \in \mathfrak{N}(l)$ и $G = G_n \in \mathfrak{G}_M$, что

$$\rho(F^n, G^n) = O(z(n, k)). \tag{70}$$

Из соотношения (70) и леммы 13 находим, что для достаточно большого n

$$|\varkappa_1 - \gamma_1| < n^{-k+\frac{1}{2}}. \tag{71}$$

В свою очередь из (67) и (71) следует, что для $|t| \leqslant t_0 = (\ln n)^{-1/2}/\alpha N$ при $n \to \infty$

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{1 + i\gamma_1 t + O(t_0^2)}{1 + i\varkappa_1 t + O((\alpha t_0 \ln n)^2)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{72}$$

Согласно лемме 14, найдется δ_1 такое, что для $F \in \mathfrak{N}(l)$ и $G \in \mathfrak{G}$

$$\max_{u \leqslant 2k} |\Delta_u| > \delta_1.$$

Пусть для определенности $|\Delta_u| > \delta_1 (u \leqslant 2k)$. В силу неравенства (72), а также в силу того, что для любого многочлена степени не выше $u-1$

$$\sup_{|x| \leqslant 1} |x^u - P(x)| > C_{16} > 0,$$

следует, что

$$D = \max_{|t| \leqslant t_0} |f^n(t) - g^n(t)| = n \max_{|t| \leqslant t_0} |f(t) - g(t)|(1 + o(1)) =$$

$$= n \max_{|t| \leqslant t_0} \left| \sum_{j=1}^{u} \Delta_j \frac{(it)^j}{j!} + o(t^u) \right| \geqslant C_{16} \delta n \frac{t_0^u}{u!}(1 + o(1)) > C_{17} n t_0^{2k}(1 + o(1)). \tag{73}$$

С другой стороны, поскольку F и G имеют конечные дисперсии,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F^n(x) - G^n(x)|\, dx < \infty.$$

Интегрируя по частям, в силу (70) и лемм 2 и 12, получаем, что

$$D = \max_{|t| \leqslant t_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d(F^n(x) - G^n(x)) \right| \leqslant t_0 \int_{-\infty}^{\infty} |F^n - G^n|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant t_0 \rho(F^n, G^n) M_1 (1 + o(1)) = O(z(n, k)(\ln n)^{\frac{1}{2}}). \tag{74}$$

Неравенства (73) и (74) для больших значений n несовместимы. Следовательно, предположение (69) неверно и (66) доказано.

Поступила в редакцию
10.2.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Две равномерные теоремы для сумм независимых слагаемых. Теория вероят. и ее примен., **I**, 4 (1956), 426—436.
[2] Ю. В. Прохоров, О равномерной предельной теореме А. Н. Колмогорова, Теория вероятн. и ее примен., **V**, 1 (1960), 103—113.
[3] Л. Д. Мешалкин, Нижняя оценка для скорости сближения распределений сумм с совокупностью неограниченно-делимых законов, ДАН СССР, 132, 4 (1960).
[4] Л. Д. Мешалкин, О приближении неограниченно-делимыми законами полиномиальных распределений, Теория вероят. и ее примен., **V**, 1 (1960), 114—124.
[5] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., ГИТТЛ, 1949.
[6] А. Н. Колмогоров, Uber das Gesetz des iterierten Logarithmus Math. Ann., **101** (1929), 126—136.
[7] K. G. Esseen, Fourier analysis of distributions functions. A mathematical study of Laplace-Gaussian law, Acta Math., 77 (1945), 1—125.
[8] Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, Воронеж, ДНТВУ, 1938.
[9] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., ГИТТЛ, 1953.

ON APPROXIMATIONS OF DISTRIBUTION FUNCTIONS OF SUMS BY INFINITELY DIVISIBLE LAWS

L. D. MESHALKIN (*MOSCOW*)

(Summary)

Let $\mathfrak{N}(l)$ be a set of distribution functions of random variables ζ such that $|\zeta| < l$, $\mathbf{D}\zeta = 1$; $\mathfrak{G}$ a set of infinitely divisible laws and $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ a sequence of independent identically distributed random variables.

We put

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi_j < x\}, \quad F^n(x) = \mathbf{P}\{\xi_1 + \cdots \xi_n < x\},$$

$$\rho(F, \mathfrak{G}) = \inf_{G \in \mathfrak{G}} \sup_x |F(x) - G(x)|$$

and

$$\psi_1(n) = \sup_F \rho(F^n, \mathfrak{G}), \quad \psi(n, l) = \inf_{F \in \mathfrak{N}(l)} \rho(F^n, \mathfrak{G})$$

Then, for $n \to \infty$

1. $n^{-\frac{2}{3}} (\ln n)^{-3\frac{1}{2}} u(n) = o(\psi_1(n))$
2. $n^{-k+1} (\ln n)^{-2k-\frac{1}{2}} u(n) = o(\psi(n, l))$ when $l < L_{2k}$;
3. $\psi(n, l)\, u(n) = o(n^{-k})$ when $l > L_{2k}$;

where $1 = L_1, = L_2 = L_3 < L_4 = L_5 < \ldots$ ($L_k < \infty$) are absolute constants defined in § 1, $u(n) \to 0$, ($n \to \infty$) and $x = o(y)$ are equal $\left|\frac{x}{y}\right| \to 0$ ($n \to \infty$).

The first equality is an improvement of Prohorov's estimate [2]:

$$\psi_1(n) > C_1 (n \ln n)^{-1}.$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
1961

УСЛОВИЯ ВЫРОЖДЕНИЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С ДИФФУЗИЕЙ

Б. А. СЕВАСТЬЯНОВ

В [1, 2] были получены необходимые и достаточные условия вырождения ветвящихся случайных процессов с несколькими типами частиц без диффузии и с одним типом частиц с диффузией. В настоящей заметке эти условия обобщаются на случай ветвящихся процессов с несколькими типами и с диффузией. В этом случае сохраняется основной качественный результат, полученный в [1,2]: *для того чтобы процесс был вырождающимся, необходимо и достаточно, чтобы математические ожидания числа частиц росли медленнее любой показательной функции* $e^{\gamma t}$, $\gamma > 0$. Попутно здесь будут исправлены некоторые неточности, допущенные в статье [2], которые, впрочем, не влияют на полученные там результаты. В § 4 приведены некоторые обобщения на случай процессов с диффузией и ненулевым сносом.

§ 1. Основные обозначения

Мы будем придерживаться здесь в основном обозначений [2]. Пусть частица типа T_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, диффундирует с коэффициентом диффузии $D_i > 0$ в r-мерной открытой области G с поглощающей границей Γ. Для точек G будем применять векторное обозначение $x = (x_1, \ldots, x_r)$. Обозначим $p_i(x, y; t)$ плотность вероятности положения частицы в момент t, если блуждание началось из точки $x \in G$. Эта плотность удовлетворяет уравнению диффузии

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = D_i \left(\frac{\partial^2 p_i}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_r^2} \right) = D_i \Delta p_i \tag{1}$$

с начальным и граничным условиями

$$p_i(x, y; t)\big|_{x \in \Gamma} = 0, \quad p_i(x, y; 0) = \delta(y - x), \tag{2}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция. Решая (1), (2) методом Фурье, получаем

$$p_i(x, y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_i \lambda_n t} \alpha_n(x) \alpha_n(y), \tag{3}$$

где $\alpha_1(x)$ ($\alpha_1(x) > 0$ для $x \in G$), $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$, ... собственные функции

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$ — собственные значения уравнения *

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad v|_{x \in \Gamma} = 0. \tag{4}$$

Пусть далее каждая частица типа T_i независимо от своего положения внутри G, происхождения, возраста и других частиц за время $\Delta t \to 0$ с вероятностью $q_i \Delta t + o(\Delta t)$ превращается в совокупность других частиц. Таким образом, каждая блуждающая в G частица либо поглотится на границе Γ, либо испытает превращение где-то внутри G. Обозначим $K_i(x, y)$ плотность вероятности точки превращения частицы типа T_i, начавшей блуждание из точки $x \in G$. Поскольку время жизни частицы T_i (если она не поглотится на границе) имеет показательное распределение с плотностью $q_i e^{-q_i t}$, $t > 0$, то

$$K_i(x, y) = \int_0^\infty p_i(x, y; t)\, q_i e^{-q_i t}\, dt. \tag{5}$$

Подставляя в интеграл, стоящий справа в (5), ряд (3) вместо $p_i(x, y; t)$ и интегрируя его формально почленно, мы получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_i}{q_i + D_i \lambda_n} \alpha_n(x)\, \alpha_n(y). \tag{6}$$

В моей статье [2] ошибочно утверждалась абсолютная сходимость ряда (6). На самом деле этот ряд сходится абсолютно только при $r = 1$. Функцию $K_i(x, y)$ будем определять непосредственно формулой (5). Обозначим $\rho^2(x, y) = \sum_{i=1}^{r} (x_i - y_i)^2$. Имеет место

Теорема 1. 1°. *При* $r = 1$ $K_i(x, y)$ *непрерывна при* $x, y \in \bar{G} = G + \Gamma$ *Каково бы ни было* $\delta > 0$ $K_i(x, y)$ *непрерывна при* $x, y \in G$, $\rho(x, y) \geqslant \delta > 0$.

2°.

$$K_i(x, y) = \begin{cases} O(|\ln \rho(x, y)|) & \text{при } r = 2, \\ O(\rho^{2-r}(x, y)) & \text{при } r \geqslant 3. \end{cases}$$

3°. *Ряд* (6) *является рядом Фурье для* $K_i(x, y)$.

Доказательство. Случай $r = 1$ тривиален (см. § 5 [2]). Непрерывность при $\rho(x, y) \geqslant \delta > 0$ и оценки 2° можно получить, оценивая в подынтегральной функции (5) $p_i(x, y; t)$ с помощью неравенства

$$p_i(x, y; t) \leqslant \frac{1}{(\pi D_i t)^{r/2}} e^{-\frac{\rho^2(x, y)}{D_i t}}.$$

Справа в этом неравенстве стоит плотность координат частицы T_i, блуждающей на безграничной плоскости. Утверждение 3° получается из

* В дальнейшем всегда будем предполагать, что область такова, что задача (4) на собственные значения имеет решение.

равенств

$$\int_G K_i(x, y)\,\alpha_n(y)\,dy = \int_G dy \int_0^\infty p_i(x, y; t)\,q_i e^{-q_i t}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty dt \int_G p_i(x, y; t)\,\alpha_n(y)\,q_i e^{-q_i t}\,dy = \int_0^\infty q_i e^{-(q_i - D_i\lambda_n)t}\,\alpha_n(x)\,dt = \frac{q_i\alpha_n(x)}{q_i + D_i\lambda_n} \quad (7)$$

(перестановка порядка интегрирования здесь возможна по теореме Фубини).

Замечание 1. Используя результаты В. А. Ильина [3], можно показать, что оценки 2° дают главную часть функции $K_i(x, y)$.

Замечание 2. Из равенства (7) следует, что интегральное уравнение

$$\alpha(x) = \Lambda \int_G K_i(x, y)\,\alpha(y)\,dy \quad (8)$$

имеет собственные функции $\alpha_n(x)$ и собственные значения $\Lambda_{in} = 1 + \frac{D_i}{q_i}\lambda_n$.

Вероятность того, что частица типа T_i поглотится на границе, не успев испытать превращение внутри G, равна

$$h_i(x) = 1 - \int_G K_i(x, y)\,dy. \quad (9)$$

В силу теоремы 1 $h_i(x)$ непрерывна.

Предположим теперь, что частицы типов $T_1, T_2, \ldots, T_s$, блуждающие внутри G независимо друг от друга, испытывают превращения, удовлетворяющие условиям ветвящихся случайных процессов (см. [1. 2]). Находящаяся внутри G частица типа T_i с вероятностью $p_i^\beta \Delta t + o(\Delta t)$ превращается в совокупность S_β частиц, состоящую из β_j частиц типа T_j, $j = 1, 2, \ldots, s$ (здесь $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$ — вектор с целочисленными неотрицательными компонентами, причем $\beta \neq \varepsilon^i$, где $\varepsilon^i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{is})$, δ_{ij} — символ Кронекера) и с вероятностью $1 + p_i^{\varepsilon_i}\Delta t + o(\Delta t)$ остается без изменения. Плотности вероятностей перехода удовлетворяют условиям

$$p_i^\beta \geqslant 0, \text{ если } \beta \neq \varepsilon^i,\ p_i^{\varepsilon_i} = -q_i \leqslant 0,\ \sum_\beta p_i^\beta = 0. \quad (10)$$

Введем производящие функции от векторного аргумента * $z = (z_1, \ldots, z_s)$

$$f_i(z) = \sum_\beta p_i^\beta z^\beta,\ i = 1, 2, \ldots s.$$

Поскольку в дальнейшем счет времени t мы будем вести по поколениям частиц, то нам будет удобнее ввести производящие функции

$$F_i(z) = \frac{f_i(z) + q_i z_i}{q_i} = \sum_\beta P_i^\beta z^\beta. \quad (11)$$

* В дальнейшем векторы $(0, 0, \ldots, 0)$ и $(1, 1, \ldots, 1)$ мы будем обозначать просто 0 и 1. Будем также употреблять обозначения: $z^\beta = z_1^{\beta_1}, \ldots, z_s^{\beta_s}$, $|z| = (|z_1|, \ldots |z_s|)$ и $u < v$ $(u \leqslant v)$, если $u_i < v_i$ $(u_i \leqslant v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Здесь $P_i^\beta = \frac{p_i^\beta}{q_i}$, $\beta \neq \varepsilon^i$, $P_i^{\varepsilon^i} = 0$, есть условная вероятность того, что частица типа T_i превратилась в совокупность частиц S_β, при условии, что какое-либо превращение произошло. Обозначим $P_i^\beta(x, t)$ вероятность того, что частица типа T_i, находящаяся в начальный момент в $x \in G$, через t поколений превращается в совокупность частиц S_β. Введем производящие функции

$$F_i(x, t; z) = \sum_\beta P_i^\beta(x, t) z^\beta, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{12}$$

которые иногда будем записывать в векторной форме

$$F(x, t; z) = (F_1(x, t; z), \ldots, F_s(x, t; z)).$$

Производящие функции (12) удовлетворяют следующей системе уравнений (см. [2]):

$$F_i(x, t+1; z) = \int_G K_i(x, y) F_i(F(y, t; z))\, dy + h_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, s \tag{13}$$

с начальным данным

$$F(x, 0; z) = z. \tag{14}$$

Вывод (13) получается с помощью формулы полной вероятности.

§ 2. Математические ожидания

Будем предполагать, что производящие функции $f_i(z)$ имеют конечные производные в точке $z = 1$ $a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right|_{z=1}$. $\delta_{ij} + a_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$ есть среднее число частиц типа T_j, получающееся за время $\Delta t \to 0$ из одной частицы типа T_i. Обозначим $m_{ij}(x, y; t)$ плотность (по y) среднего числа частиц типа T_j, если в начальный момент времени была одна частица типа T_i в точке $x \in G$. Обобщая известное дифференциальное уравнение для диффузии с изменением количества вещества (см. [4]), мы получаем

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial t} = D_i \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial^2 m_{ij}}{\partial x_l^2} + \sum_{k=1}^{s} a_{ik} m_{kj}, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{15}$$

$$m_{ij}(x, y; 0) = \delta_{ij}\, \delta(y - x), \; m_{ij}(x, y; t)|_{x \in \Gamma} = 0. \tag{16}$$

Представляя решение (15), (16) в виде ряда по $\alpha_n(x)$, получаем

$$m_{ij}(x, y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{s} \psi_{ijnk}(t)\, e^{\theta_{nk} t}\, \alpha_n(x) \alpha_n(y), \tag{17}$$

где $\psi_{ijnk}(t)$ — многочлены степени не выше $s-1$, а θ_{nk}, $k = 1, 2, \ldots, s$, характеристические корни матрицы $\| a_{ij} - \delta_{ij} D_i \lambda_n \|$.

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться предложением, которое будем называть теоремой Фробениуса (см. [5]): *Если* $B = \| b_{ij} \| -$

матрица с неотрицательными элементами, то существует такой характеристический корень $\theta_0 \geqslant 0$, *что для всех характеристических корней* θ *матрицы* B $|\theta| \leqslant \theta_0$, *причем, если матрица* B *неразложима, то корень* θ_0 — *простой. Если действительная матрица* B *имеет неотрицательные недиагональные элементы, то существует такой действительный характеристический корень* θ_0, *что для всех характеристических корней* θ *матрицы* B $\operatorname{Re}\theta \leqslant \theta_0$, *причем для всех невещественных корней* $\operatorname{Re}\theta < \theta_0$, *а если матрица* B *неразложима, то* θ_0 — *простой корень. Пусть число* k *действительно. В обоих предыдущих случаях все главные миноры матрицы* $\| k\delta_{ij} - b_{ij} \|$ *неотрицательны тогда и только тогда, когда* $k \geqslant \theta_0$.

Матрица $\| a_{ij} - \delta_{ij} D_i \lambda_n \|$ имеет неотрицательные недиагональные элементы. Пусть характеристические корни θ_{nk} этой матрицы таковы, что $\operatorname{Re}\theta_{nk} \leqslant \theta_{n1}$. Корень θ_{n1} будем обозначать просто θ_n.

Лемма 1. $\theta_1 > \theta_2 \geqslant \ldots \geqslant \theta_n \geqslant \theta_{n+1} \geqslant \ldots$.

Доказательство. По теореме Фробениуса все главные миноры матрицы $\| \delta_{ij}\theta_n + \delta_{ij} D_i \lambda_n - a_{ij} \|$ неотрицательны. Отсюда следует, что все главные миноры матрицы

$$\| \delta_{ij}\theta_n + D_i\delta_{ij}\lambda_{n+1} - a_{ij} \| = \| \delta_{ij}\theta_n + \delta_{ij} D_i \lambda_n - a_{ij} + D_i(\lambda_{n+1} - \lambda_n)\delta_{ij} \|$$

также неотрицательны. Из теоремы Фробениуса вытекает, что $\theta_{n+1} \leqslant \theta_n$. Поскольку $\lambda_2 > \lambda_1$, $D_i > 0$, то $\theta_2 \neq \theta_1$, следовательно $\theta_2 < \theta_1$.

Пусть θ_0 — максимум действительных частей характеристических корней матрицы $\| a_{ij} \|$, $D = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} D_i > 0$.

Лемма 2. *При любом* n *имеет место неравенство*

$$\theta_n \leqslant \theta_0 - D\lambda_n. \tag{18}$$

Доказательство. Поскольку все главные миноры матрицы $\| \delta_{ij}\theta_0 - a_{ij} \|$ неотрицательны и $D_i \geqslant D$, то все главные миноры матрицы

$$\| (\theta_0 - D\lambda_n)\delta_{ij} + \delta_{ij} D_i \lambda_n - a_{ij} \| = \| \theta_0\delta_{ij} - a_{ij} + (D_i - D)\lambda_n\delta_{ij} \|$$

также неотрицательны. Отсюда следует (18).

Из леммы 2 вытекает абсолютная сходимость при $t > 0$ ряда (17) и его производных. Для доказательства надо воспользоваться известными оценками λ_n и оценками модуля собственных функций $\alpha_n(x)$ и их производных, полученных Д. М. Эйдусом [6].

Теорема 2. 1) *Если* $\theta_1 < 0$, *то при* $t \to \infty$ *все* $m_{ij}(x, y; t) \to 0$; 2) *если* $\theta_1 = 0$, *то при* $t \to \infty$ *все* $m_{ij}(x, y; t) = o(e^{\gamma t})$, *каково бы ни было* $\gamma > 0$; 3) *если* $\theta_1 > 0$, *то найдутся такие* i, j, *что* $m_{ij}(x, y; t) \approx Ce^{\theta_1 t}\alpha_1(x)\alpha_1(y)$, $C > 0$.

Доказательство. Первые два утверждения следуют непосредственно из формулы (16). Докажем 3) для неразложимой матрицы $\| a_{ij} \|$ (общий случай легко получить, рассматривая неразложимую подматрицу $\| a_{ij} \|$, соответствующую некоторому классу сообщающихся типов [1]). Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что уравнение (15) имеет решени

$e^{\theta_1 t}\alpha_1(x)$, $C_i > 0$, $i = 1, 2, , \ldots, s$. В силу (16)

$$C_i\alpha_1(x) = \int_G \left(\sum_{j=1}^{s} C_j m_{ij}(x, y; 0)\right)\alpha_1(y)\,dy, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

поэтому

$$C_i e^{\theta_1 t}\alpha_1(t) = \int_G \left(\sum_{j=1}^{s} C_j m_{ij}(x, y; t)\right)\alpha_1(y)\,dy. \tag{19}$$

Для неразложимой матрицы $\|a_{ij}\|$ коэффициент в (17) при $e^{\theta_1 t}$ может быть только константой, а в силу (19) найдутся такие i, j, для которых она положительна.

§ 3. Вероятности вырождения

Вероятность того, что t-е поколение процесса, начавшегося с одной частицы типа T_i в точке $x \in G$, выродится (т. е. все частицы погибнут или поглотятся на границе) равна $P_i^0(x, t) = F_i(x, t; 0)$ и удовлетворяет, в силу (13) и (14), уравнениям $(P^0(y, t) = (P_1^0(y, t), \ldots, P_s^0(y, t))$

$$P_i^0(x, t+1) = \int_G K_i(x, y) F_i(P^0(y, t))\,dy + h_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{20}$$

$$P_i(x, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \quad x \in G. \tag{21}$$

Вероятность $P_i(x) = \lim\limits_{t\to\infty} P_i^0(x, t)$ того, что процесс рано или поздно выродится, назовем *вероятностью вырождения*. Если $P_i(x) \equiv 1$, $i = 1, 2, \ldots$, то процесс назовем *вырождающимся*; в противном случае процесс будем называть *невырождающимся*. Полагая $t \to \infty$ в (20), получаем для вероятностей вырождения $P(x) = (P_1(x), \ldots, P_s(x))$ систему нелинейных интегральных уравнений

$$P_i(x) = \int_G K_i(x, y) F_i(P(y))\,dy + h_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{22}$$

Система (22) всегда имеет корень 1. Если этот корень единствен, то $P(x) \equiv 1$ и процесс вырождается. Имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы процесс был невырождающимся, необходимо и достаточно, чтобы система*

$$u_i(x) = \int_G K_i(x, y) F_i(u(y))\,dy + h_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, s \tag{23}$$

имела корень $0 \leqslant u(x) \leqslant 1$, $u(x) \not\equiv 1$.

Доказательство. Пусть существует такой корень $u(x)$. Из (20), (21) и (23) по индукции следует $u(x) \geqslant P(x, t)$, откуда $u(x) \geqslant P(x)$. Следовательно, $P(x) \not\equiv 1$. Необходимость доказана выше.

Теорема 4. *В банаховом пространстве непрерывных в* $G + \Gamma = \overline{G}$ *векторных функций с метрикой* $\rho(u, v) = \max\limits_i \max\limits_{x\in G+\Gamma} |u_i(x) - v_i(x)|$ *отобра-*

жение

$$v_i(x) = \int_G K_i(x, y) P(u(y))\, dy + h_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{24}$$

переводит ограниченное семейство непрерывных функций $|u(x)| \leqslant 1$ *в компактное семейство функций.*

Доказательство. Так как $|F(u(y))| \leqslant 1$ при $|u(y)| \leqslant 1$, то семейство $\{v(x)\}$ ограничено. В силу теоремы 1, функции $v_i(x)$ равностепенно непрерывны, если $|u(y)| \leqslant 1$. Следовательно, семейство $\{v(x)\}$ компактно.

Теорема 5. *Если все* F_i *линейны, то процесс вырождается.*

Доказательство. Обозначим $F_i(z) = c_{i0} + \sum_{j=1}^{s} c_{ij} z_j$, $\sum_{j=0}^{s} c_{ij} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Тогда (22) превратится в

$$P_i(x) = \int_G K_i(x, y) \left[c_{i0} + \sum_{j=1}^{s} c_{ij} P_j(y) \right] dy + h_i(x). \tag{25}$$

Пусть $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \min\limits_{x \in G} P_i(x) = \delta < 1$. Обозначим $\delta' = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \min\limits_{x \in G} h_i(x) > 0$. Из (25) следует

$$P_i(x) \geqslant \delta \int_G K_i(x, y)\, dy + h_i(x) = \delta [1 - h_i(x)] + h_i(x) =$$

$$= \delta + (1 - \delta) h_i(x) \geqslant \delta + (1 + \delta)\delta',$$

откуда получаем противоречие $\delta \geqslant \delta + (1 - \delta)\delta'$.

Лемма 3. *Пусть* $u^{(1)}(x)$ *и* $u^{(2)}(x)$ *непрерывные векторные функции в* G, $0 \leqslant u^{(1)}(x) < u^{(2)}(x) \leqslant 1$. *Если* $F_{i_0}(z)$ *нелинейна и для* $x \in G$

$$u_{i_0}^{(j)}(x) \geqslant \int_G K_{i_0}(x, y) F_{i_0}(u^{(j)}(y))\, dy + h_{i_0}(x), \quad j = 1, 2,$$

то для всех $v(x) = u^{(1)}(x) + t[u^{(2)}(x) - u^{(1)}(x)]$, $0 < t < 1$; $x \in G$

$$v_{i_0}(x) > \int_G K_{i_0}(x, y) F_{i_0}(v(y))\, dy + h_{i_0}(x).$$

Доказательство. Функция

$$\varphi(t) = \int_G K_{i_0}(x, y) F_{i_0}(v(y))\, dy + h_{i_0}(x) - v_{i_0}(x)$$

при $0 < t < 1$ строго выпукла ($\varphi''(t) > 0$); так как $\varphi(0) \leqslant 0$, $\varphi(1) \leqslant 0$, то при $0 < t < 1$ $\varphi(t) < 0$.

Теорема 6. *Для того чтобы процесс с неразложимой матрицей* $\|a_{ij}\|$ *был невырождающимся, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая непрерывная в* $G \in \Gamma$ *векторная функция* $0 \leqslant \beta(x) \leqslant 1$, $\beta(x) \not\equiv 0$, *что для всех* $x \in G$, $i = 1, 2, \ldots, s$

$$1 - \beta_i(x) > \int_G K_i(x, y) F_i(1 - \beta(y))\, dy + h_i(x). \tag{26}$$

Доказательство. Пусть процесс не вырождается. Тогда существуют два решения (23) $u^{(1)}(x) = P(x)$ и $u^{(2)}(x) = 1$. В силу теоремы 5, не все $F_i(z)$ линейны. Из неразложимости $\|a_{ij}\|$ нетрудно получить $P(x) < 1$ для

сех $x \in G$. Применяя к функциям $u^{(1)}(x) < u^{(2)}(x)$ и i с нелинейной $F_i(z)$ емму 3, получаем (26) для $\beta^*(x) = (1-t)[1-u^{(1)}(x)]$. Уменьшая немного екоторые $\beta_i^*(x)$, нетрудно получить $\beta(x) > 0$, для которых неравенства (26) ыполняются для всех $i = 1, 2, \ldots, s$. Докажем достаточность. Если ыполняется (26), то выпуклое ограниченное множество $0 \leqslant u(x) \leqslant 1 - \beta(x)$ тображается в свою часть. В силу теоремы 4, рассматриваемый оператор полне непрерывен в соответствующем банаховом пространстве. Поэтому ю принципу Шаудера (см. [7]) существует неподвижная точка $0 \leqslant u(x) \leqslant 1 - \beta(x)$, а тогда по теореме 3 процесс не вырождается.

Среднее число частиц типа T_j, получающееся за одно превращение из частицы типа T_i, равно $A_{ij} = \left.\frac{\partial F_i}{\partial z_j}\right|_{z=1}$. В силу (11),

$$A_{ij} = \delta_{ij} + \frac{a_{ij}}{q_j}.$$

Лемма 4. *Все характеристические корни матрицы* $\| a_{ij} - D_i\lambda_1\delta_{ij} \|$ *имеют неположительные действительные части тогда и только тогда, когда все характеристические корни матрицы* $\left\| \frac{A_{ij}}{\Lambda_{i1}} \right\|$ *по модулю не превосходят единицы.*

Доказательство. Обозначим Θ_1 наибольший по модулю положительный характеристический корень матрицы $\left\| \frac{A_{ij}}{\Lambda_{i1}} \right\|$. В силу теоремы Фробениуса, все главные миноры матрицы $\left\| \delta_{ij} - \frac{A_{ij}}{\Lambda_{i1}} \right\|$ ($\| D_i\lambda_1\delta_{ij} - a_{ij} \|$) неотрицательны тогда и только тогда, когда $\Theta_1 \leqslant 1$ ($\Theta_1 \leqslant 0$). Утверждение леммы вытекает из того, что, если хотя бы у одной из матриц

$$\| \delta_{ij}\Lambda_{i1} - A_{ij} \| = \| \delta_{ij}(\lambda_1 D_i/q_i + 1) - \left(\frac{a_{ij}}{q_i} + \delta_{ij} \right) \| = \left\| \frac{D_i\lambda_1\delta_{ij} - a_{ij}}{q_i} \right\|,$$

$$= \left\| \delta_{ij} - \frac{A_{ij}}{\Lambda_{i1}} \right\|, \quad \| D_i\lambda_1\delta_{ij} - a_{ij} \|$$

все главные миноры неотрицательны, то и все остальные матрицы удовлетворяют этому свойству.

Лемма 5. *Пусть* $\| a_{ij} \|$ *неразложима. Для того чтобы существовала такая векторная непрерывная функция* $\beta(x) > 0$ $(x \in G)$, *для которой внутри* G

$$\beta_i(x) < \int_G K_i(x, y) \sum_{j=1}^{s} A_{ij}\beta_j(y)\, dy, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{27}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\Theta_1 > 1$.

Доказательство. Заметим сначала, что неразложимость $\| a_{ij} \|$ влечет за собой неразложимость $\left\| \frac{A_{ij}}{\Lambda_{i1}} \right\|$. Пусть $\Theta_1 > 1$. Тогда существуют такие $C_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$, что

$$\Theta_1 C_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{A_{ij}}{\Lambda_{i1}} C_j, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{28}$$

Положим

$$\beta_i(x) = C_i\alpha_1(x), \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{29}$$

В силу (28) и (8)

$$\theta_1\beta_i(x) = \int_G K_i(x, y) \sum_{j=1}^{s} A_{ij}\beta_j(y)\,dy, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{30}$$

Отсюда следует (27), так как $\alpha_1(x) > 0$ при $x \in G$. Пусть теперь для $\beta(x) > 0$ выполнены неравенства (27). Умножая их на $\alpha_1(x)$ и интегрируя по $x \in G$, мы получаем

$$l_i < \sum_{j=1}^{s} A_{ij} l_j \Lambda_{ij}^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

где $l_i = \int_G \beta_i(x)\alpha_1(x)\,dx > 0$. Отсюда следует, что хотя бы один главный минор $\left\| \delta_{ij} - \frac{A_{ij}}{\Lambda_{11}} \right\|$ отрицателен (см. [1], лемма 9; приведенное там доказательство для положительных матриц без труда переносится на неразложимые неотрицательные матрицы). Следовательно, $\theta_1 > 1$.

Теорема 7. *Для того чтобы процесс был вырождающимся, необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех характеристических корней матрицы* $\| a_{ij} - \delta_{ij} D_i \lambda_1 \|$ *были неположительны.*

Доказательство. Докажем сначала теорему для неразложимой матрицы $\| a_{ij} \|$. Пусть процесс не вырождается. Тогда по теореме 6 существует $\beta(x) > 0$, для которой выполняются неравенства (26). В силу неравенств $1 - F_i(z) < \sum_j A_{ij}(1 - z_j)$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ и равенства (9) отсюда следует (27). Поэтому по лемме 5 $\theta_1 > 1$, а по лемме 4 $\theta_1 > 0$. Предположим теперь $\theta_1 > 0$. Тогда $\theta_1 > 1$. Покажем, что процесс в этом случае будет невырождающимся. Функции (29) удовлетворяют системе уравнений (30). Выберем $\theta_1 > \theta_1' > 1$ и обозначим $A_{ij}' = \frac{A_{ij}}{\theta_1'}$. Равенства (30) можно записать в виде

$$\beta_i(x) - \int_G K_i(x, y) \sum_{j=1}^{s} A_{ij}'\beta_j(y)\,dy = \left(\frac{\theta_1}{\theta_1'} - 1\right)\beta_i(x) < 0 \text{ при } x \in G. \tag{31}$$

Выбирая $\varepsilon > 0$ таким, чтобы

$$F_i(1 - \varepsilon\beta(y)) < 1 - \varepsilon \sum_{j=1}^{s} A_{ij}'\beta_j(y), \quad y \in G$$

получаем из (31)

$$1 - \varepsilon\beta_i(x) > \int_G K_i(x, y) F_i(1 - \varepsilon\beta(y))\,dy + h_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, s; \tag{32}$$

отсюда по теореме 6 следует невырожденность процесса. Доказательство теоремы в общем случае сводится к случаю неразложимых матриц $\| a_{ij} \|$ так же, как и в [1] (типы частиц разбиваются на классы сообщающихся типов; каждому классу соответствует неразложимая подматрица $\| a_{ij} \|$, приведенное выше доказательство применяется последовательно к этим классам).

Из теоремы 2 и 7 вытекает

Теорема 8. *Для того чтобы процесс был вырождающимся, необходимо достаточно, чтобы при любом* $\gamma > 0$

$$m_{ij}(x, y; t) = o(e^{\gamma t}) \text{ при } t \to \infty.$$

§ 4. Некоторые обобщения

Пусть в процессе участвуют частицы одного типа, причем в области G происходит диффузия со сносом, т. е. плотность $p(x, y; t)$ удовлетворяет вместо (1) уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^{r} L_i \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Плотность $p(x, y; t)$ представима в этом случае в виде ряда

$$p(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{L^2}{4D} + D\lambda_n\right) t} \beta_n(x) \beta_n^*(y),$$

где

$$L^2 = \sum_{i=1}^{r} L_i^2, \quad \beta_n(x) = e^{-\sum_{i=1}^{r} L_i x_i D^{-1}} \alpha_n(x), \quad \beta_n^*(x) = e^{\sum_{i=1}^{r} L_i x D^{-1}} \alpha_n(x),$$

а λ_n, $\alpha_n(x)$, как и прежде, — собственные значения и функции задачи (4) Плотность математического ожидания представима в виде ряда

$$m(x, y; t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(a - \frac{L^2}{4D} - D\lambda_n\right) t} \beta_n(x) \beta_n^*(y).$$

В этом случае также справедлива теорема 8, причем критическое значение параметра a равно $a_0 = D\lambda_1 = \frac{L^2}{4D}$; *для вырождения процесса необходимо и достаточно* $a \leqslant a_0$.

Рассмотрим теперь процесс с s типами частиц. Пусть блуждание частиц типа T_k подчиняется дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial p_k}{\partial t} = D_k \left(H p_k + \sum_{i=1}^{r} L_i \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \right), \tag{33}$$

где $D_k > 0$, $Hp_k = \sum_{i,j=1}^{r} d_{ij} \frac{\partial^2 p_k}{\partial x_i \partial x_j}$ и квадратическая форма $\sum_{i,j} d_{ij} z_i z_j$ положительно определена. В этом случае также справедлива теорема 8. Для доказательства надо преобразованием функций p_k и координат x свести (33) к (1). Обозначим Δ — определитель $|d_{ij}|$, Δ_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу d_{ij} в $\|d_{ij}\|$, $L^2 = \sum_{i,j=1}^{r} L_i L_j \frac{\Delta_{ij}}{\Delta}$ и λ_1 — наименьшее собственное значение задачи

$$Hv + \lambda v = 0, \quad v|_{x \in \Gamma} = 0. \tag{34}$$

Тогда для того чтобы процесс был вырождающимся, необходимо и доста-

точно, чтобы все характеристические корни матрицы $\| a_{ij} - \delta_{ij} D_i (\lambda_1 - L^2/4) \|$ *имели неположительные действительные части.*

Примененный в этой статье метод доказательства существенно использует тот факт, что система собственных функций задачи (34)—одна и та же для всех типов частиц. По-видимому, основной результат этой статьи сохраняется и в общем случае.

Поступила в редакцию
24.3.60.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. А. Севастьянов, Теория ветвящихся случайных процессов, Успехи матем. наук, **VI**, 6 (1951), 47—99.
[2] Б. А. Севастьянов, Ветвящиеся случайные процессы для частиц, диффундирующих в ограниченной области с поглощающими границами, Теория вероят. и ее примен., **III**, 2 (1958), 121—136.
[3] В. А. Ильин, Ядра дробного порядка, Матем. сб., **41** (83), (1957), 459—480.
[4] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, М., Гостехиздат, 1953.
[5] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., Гостехиздат, 1953.
[6] Д. М. Эйдус, Некоторые неравенства для собственных функций, ДАН СССР, **107**, 6 (1956), 796—798.
[7] Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959.

THE EXTINCTION CONDITIONS FOR BRANCHING PROCESSES WITH DIFFUSION

B. A. SEVASTJANOV *(MOSCOW)*

(Summary)

We derive the necessary and sufficient conditions for the extinction of branching processes with several types of particles diffusing in a multidimensional bounded domain with absorbing boundaries.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1961

СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИИ С ГРАНИЦАМИ

А. В. СКОРОХОД

Стохастические уравнения для марковских процессов в разной форме рассматривались в работах С. Н. Бернштейна [1], И. И. Гихмана [2], [3], К. Ито [4], Маруямы [5], Дж. Дуба [6].

В работах [1]—[6] рассматривался случай процесса во всем пространстве, а в [6] рассмотрен диффузионный процесс с поглощающим экраном. В. Феллер аналитическими методами нашел все марковские диффузионные процессы (однородные по времени) на отрезке (т. е. в случае наличия границ), имеющие непрерывные траектории, а также указал на некоторые процессы, имеющие разрывы только на границе отрезка (см., напр., [7], [8]). Всевозможные диффузионные процессы, имеющие разрывы только на границе отрезка, были описаны А. Вентцелем в [9] (также аналитическим методом Феллера).

Цель настоящей работы — построить траектории для диффузионных процессов с границами, аналогичных процессам, рассмотренных Феллером, но не обязательно однородных. Аппаратом для такого построения будут служить стохастические уравнения, которые будут употребляться в форме интегральных уравнений Ито. Для решений этих уравнений используется отчасти метод конечных разностей, широко использовавшийся в работах [2], [3], [5]. Ввиду разрывности коэффициентов, определяющих процесс, этот метод иногда не применим, и тогда используется аппроксимация уравнения с разрывными коэффициентами уравнением с гладкими коэффициентами. Результаты этой статьи были доложены на конференции по теории вероятностей и математической статистике, состоявшейся в 1958 году в г. Ереване.

Введение

Мы будем рассматривать только одномерные диффузионные процессы. Такие процессы определяются в случае отсутствия границ двумя коэффициентами: коэффициентом диффузии $\sigma^2(t, x)$ и коэффициентом переноса $a(t, x)$. Стохастическое уравнение для процесса можно записать в форме

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))\,dt + \sigma(t, \xi(t))\,dw(t), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — искомый диффузионный процесс, а $w(t)$ — процесс броуновского движения. Уравнение (1) имеет более определенный смысл в проинтегриро-

ванной форме Ито:

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s))\, dw(s). \quad (2$$

В том случае, когда процесс происходит на конечном отрезке, уравнение (1) определяет поведение диффундирующей частицы только внутри отрезка, на границе поведение частицы должно быть доопределено. Из этого уже ясно, что в уравнении должны появиться члены, отличные от нуля лишь на границе, т. е. имеющие разрывной характер. Наша цель — нахождение этих членов и доказательство существования и единственности решений, получаемых при этом стохастических уравнений.

Из результатов Феллера ([7], [8]) следует, что в случае непрерывных траекторий процесса возможны следующие типы поведения процесса на границе:

а) *поглощение*, в этом случае частица, достигнув границы, останавливается (иногда удобнее считать, что частица исчезает),

б) *мгновенное отражение*, при котором частица, дойдя до границы частицы, возвращается внутрь непрерывным образом, причем мера множества моментов времени, проведенных частицей на границе, с вероятностью равна нулю.

в) *запаздывающее отражение*, при котором движение происходит так, как и в предыдущем случае, только время, проведенное частицей на границе при условии, что она туда попадает, с вероятностью 1 положительно.

г) *частичное отражение* на границе, при котором частица при попадании на границу может и отразиться, как и в случае б), а может и остановиться, как в случае а).

Отметим, что мы будем рассматривать процессы при наличии одной граничной точки, т. е. на полупрямой, — переход к случаю двух граничных точек не вызывает никаких затруднений, и из проводимых далее результатов легко извлечь теоремы существования и единственности решений стохастических при всевозможных комбинациях граничных условий. Процессы, которые мы будем рассматривать, будут происходить на полупрямой $x \geqslant 0$ и единственной точкой границы будет точка $x = 0$. Относительно диффузионных коэффициентов $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ будет предполагаться, что они определены при $x > 0$ и $t \in [t_0, T]$ непрерывны по совокупности переменных в этой области и удовлетворяют условиям Липшица по x, т. е. существует такое K, что

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leqslant K|x - y|, \ |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leqslant K|x - y|. \quad (3$$

Рассмотрим теперь кратко каждый из упомянутых выше типов процессов. *Процесс с поглощающей границей* был построен Дж. Дубом в [6], поэтому мы не будем на нем останавливаться, укажем лишь, что построение Дуба можно осуществить, если искать этот процесс как решение уравнения [2], в котором $a(t, x) = \sigma(t, x) = 0$ при $x \leqslant 0$. В случае процесса с отражающей границей, частица, попадая в точку $x = 0$, должна получить в этой точке положительную скорость, для того чтобы вернуться на полупрямую $x > 0$. Если эта скорость конечна, то для того, чтобы выйти из

граничной точки, нужно положительное время, т. е. в этом случае получится процесс с замедленным отражением. Конечную положительную скорость мы получим в точке нуль, если положим $\sigma(t, 0) = 0$ и $a(t, 0) > 0$. Нам удобнее считать, что $\sigma(t, 0) = a(t, 0) = 0$, и ввести дополнительный член, отличный от нуля только на границе. Пусть $\psi_0(x) = 0$ при $x > 0$ и $\psi_0(x) = 1$ при $x = 0$, а $c(t)$ — скорость ухода с границы, если мы попадаем туда в момент t. Процесс с замедленным отражением, обладающий перечисленными свойствами, естественно искать в виде решения уравнения

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s))\, dw(s) + \int_{t_0}^{t} c(s)\, \psi_0(\sigma(s))\, ds. \quad (4)$$

Изучению уравнений вида (4) посвящен второй раздел этой работы, который будет опубликован позднее.

Из вышесказанного вытекает, что в случае процесса с мгновенным отражением, скорость ухода с границы должна быть бесконечной. Поэтому для такого процесса уравнение нужно искать в форме, существенно отличной от (4). Пусть $\xi(t)$ — некоторый процесс, назовем $\zeta(t)$ «функцией отражения» для $\xi(t)$, если $\zeta(t)$ с вероятностью 1 — непрерывная монотонная функция, точками роста которой могут служить лишь нули $\xi(t)$. Естественно искать процесс с мгновенным отражением как решение уравнения

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s))\, dw(s) + \zeta(t), \quad (5)$$

где $\zeta(t)$ — «функция отражения» для $\xi(t)$, $\zeta(t_0) = 0$, а $\xi(t) \geqslant 0$ для всех значений t. Поскольку множество моментов времени, при которых $\xi(t) = 0$, имеет меру Лебега, равную нулю, то неважно, как доопределять $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ при $x = 0$.

Неудобство уравнения (5) в том, что там две неизвестные функции: $\xi(t)$ и $\zeta(t)$. Однако несмотря на это решение, уравнение (5) единственно. Пояснением этого факта может служить доказательство единственности для простейшего случая: $a(t, x) = 0$, $\sigma(t, x) = 1$. Это доказательство настолько просто, что может быть приведено в этом кратком введении.

Итак, пусть $\xi_i(t) = \xi(t_0) + w(t) - w(t_0) + \zeta_i(t)$, $i = 1, 2$, два решения (5). Тогда $\xi_2(t) - \xi_1(t) = \zeta_2(t) - \zeta_1(t)$. Пока $\xi_2(t) - \xi_1(t) > 0$, $\zeta_2(t)$ не возрастает, так как $\xi_2(t) > \xi_1(t) \geqslant 0$. Значит и $\xi_2(t) - \xi_1(t)$ не возрастает пока является положительным. Аналогично устанавливается, что $\xi_2(t) - \xi_1(t)$ не убывает, пока является отрицательным. Кроме того, эта разность непрерывна и равна нулю при $t = t_0$. Из этих свойств разности немедленно вытекает, что она тождественно равна нулю и значит $\xi_1(t) = \xi_2(t)$ и $\zeta_1(t) = \zeta_2(t)$. Таким образом, (5) имеет единственное решение при единственно возможной функции $\zeta(t)$. Оказывается, что эта функция $\zeta(t)$ обладает следующим замечательным свойством: почти для всех точек

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\zeta(t + \Delta t) - \zeta(t)}{\sqrt{\Delta t}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, \sigma(t, +0)\, \psi_0(\xi(t)), \quad (6)$$

где $\psi_0(x)$ — точно такая же функция, как и в (4). Переписывая (6) в интегральной форме, которой в дальнейшем будет придан строгий смысл,

получим:

$$\zeta(t) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_{t_0}^{t} \sigma(s, +0)\, \psi_0(\xi(s))\, \sqrt{ds},$$

откуда следует возможность рассматривать уравнение для процесса с мгновенным отражением в форме:

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s))\, dw(s) +$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_{t_0}^{t} \sigma(s, -0)\, \psi_0(\xi(s))\, \sqrt{ds} \qquad (7)$$

Процесс с мгновенной отражающей границей будет рассмотрен в первом разделе настоящей рабсты.

Процесс с частично отражающей границей легко построить, если уже построен процесс с мгновенным отражением. Поскольку в дальнейшем на этом типе процесса мы не будем останавливаться, то наметим это построение здесь более детально. Нам удобнее считать, что точка 0 расщеплена на две: 0^+ и 0^-, причем частица с полупрямой $x > 0$ попадает сначала в точку 0^+ и отражается от нее так, как в процессе с мгновенным отражением, из точки же 0^+ мы в некоторый случайный момент переходим в точку 0^-, попав в которую, мы там навсегда и остаемся. Для построения такого процесса, если уже задан процесс с мгновенным отражением, нужно построить только случайную величину τ — время перехода из точки 0^+ в 0^-. Построить такую величину можно следующим образом. Пусть $\nu(t)$ — пуассоновский процесс с независимыми приращениями, $\mathbf{M}\nu(t) = t$, не зависящий ни от $\xi(t_0)$, ни от $w(t)$. Пусть далее $\rho(t)$ — некоторая непрерывная функция. Рассмотрим теперь процесс $\eta(t) = \nu\left(\int_{t_0}^{t} \rho(t)\, d\xi(t)\right)$, где $\xi(t)$ — то же что и в (5). Обозначим через τ момент времени, для которого $\eta(\tau + 0) = 1$, а $\eta(\tau - 0) = 0$. Легко видеть, что в момент времени τ $\xi(\tau) = 0$, так что переход в 0^- будет происходить только из 0^+. Кроме того, можно убедиться, что каковы бы ни были $t_1 < t_2$, $\mathbf{P}\{\tau > \tau_2 \mid \xi(s),\ s \leqslant t_1\} = \mathbf{P}\{\tau > t_2 \mid \xi(t_1)\}$, откуда вытекает, что полученный процесс будет марковским. Чтобы получить уравнение для этого процесса, положим $\sigma(t, 0^-) = 0$, $a(t, 0^-) = 0$. Тогда

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s))\, dw(s) +$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_{t_0}^{t} \sigma(s, +0)\, \psi_0(\xi(s))\, \sqrt{ds} + \varepsilon\eta(t), \qquad (8)$$

где ε — условное обозначение для «числа», которое нужно прибавить к 0^+, чтобы получить 0^-. Теоремы о существовании и единственности решения уравнения (8) немедленно вытекают из соответствующих теорем для процесса с мгновенно отражающей границей.

Методом, аналогичным только что описанному, можно построить процессы с разрывным уходом с границы, если число соскоков с границы за каждый конечный промежуток времени конечно с вероятностью 1 (процессы, рассмотренные В. Феллером в [8]). Пусть $\chi(t)$ с вероятностью 1—монотонно не убывающий чисто разрывной однородный процесс с независимыми приращениями, имеющий конечное число скачков на каждом конечном промежутке времени. Если мы уже можем строить решения уравнений (4) и (7), то сможем построить и процессы, у которых частица отражается некоторое время как в процессах с отражающим экраном, а затем в некоторый случайный момент соскакивает с границы с распределением, совпадающим с распределением скачка процесса $\chi(t)$. Такие процессы будут решениями следующих уравнений: в случае мгновенного отражения —

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s))\,dw(s) +$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_{t_0}^{t} \sigma(s, +0)\,\psi_0(\xi(s))\sqrt{ds} + \chi\left(\int_{t_0}^{t} \rho(s)\,\psi_0(\xi(s))\sqrt{ds}\right), \qquad (9)$$

в случае замедленного отражения —

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, \xi(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, \xi(s))\,dw(s) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \psi_0(\xi(s))\,c(s)\,ds + \chi\left(\int_{t_0}^{t} \rho(s)\,\psi_0(\xi(s))\,ds\right). \qquad (10)$$

Функция $\rho(t)$ — произвольная неотрицательная функция, характеризующая интенсивность числа соскоков. Существование и единственность решений этих уравнений вытекает из соответствующих теорем для процессов с отражающими границами. Случай, когда за конечное время возможно бесконечное число соскоков с границы (рассмотренный А. Д. Вентцелем в [9]), уже не может быть так просто изучен полностью, как только что рассмотренный. В настоящей статье мы не будем касаться этого случая. Заметим еще, что результаты, относящиеся к процессам с мгновенным отражением, могут быть перенесены и на случай многомерных процессов, однако таким образом удается построить только весьма узкий класс многомерных процессов с границей. Для построения полной теории стохастических уравнений для многомерных процессов диффузии при наличии границ (хотя бы только в случае непрерывных траекторий) методов настоящей статьи будет, по-видимому, недостаточно.

Последнее замечание. В этой статье широко используются интегралы вида: $\int_{t_0}^{t} f(s)\,dw(s)$, где $f(s)$ — некоторый случайный процесс, а $w(s)$ — процесс брауновского движения. Определение таких интегралов принадлежит К. Ито и содержится, например, в его работе [4], имеется оно также и в [10], гл. 6, § 3. Нам понадобятся следующие факты из теории таких интегралов:

а) они определены для всякого процесса $f(t)$, для которого при всяком

$t_1 > t_0$, процесс $w(t) - w(t_1)$, $t > t_1$, не зависит от совокупности процессов $w(s)$ и $f(s)$, $s \leqslant t_1$, и, кроме того, $\int_{t_0}^{t} \mathbf{M} f^2(s)\, ds < \infty$,

б) $$\mathbf{M}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\, dw(s)\right) = 0, \quad \mathbf{M}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\, dw)s)\right)^2 = \int_{t_0}^{t} \mathbf{M} f^2(s)\, ds,$$

в) $\int_{t_0}^{t} f(s)\, dw(s)$, как функция t, является с вероятностью единица не прерывным мартингалом,

г) если функция $f(s)$ ограничена, т. е. существует постоянная L такая что $|f(s)| \leqslant L$ с вероятностью 1, то

$$\mathbf{M}\left(\int_{t_0}^{t} f(s)\, dw(s)\right)^4 = 6 \int_{t_0}^{t} \mathbf{M}\left[f(s) \int_{t_0}^{t} f(u)\, dw)u)\right]^2 ds.$$

1. Процесс с мгновенно отражающей границей

В этом разделе мы будем считать, что диффузионные коэффициенты $\sigma^2(t, x)$ и $a(t, x)$ определены при $x \geqslant 0$ и $t \in [t_0, T]$, непрерывны по совокупности переменных в этой же области и удовлетворяют условию Липшица по x, т. е. существует такая постоянная K, что выполняется формула (3) для всех $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, $t \in [t_0, T]$. Как уже отмечалось во введении, мы будем искать процесс с мгновенным отражением на границе в виде решения уравнения (5), где $\zeta(t)$ с вероятностью 1 — непрерывный неубывающий процесс, имеющий точками роста только нули процесса $\xi(t)$. Цель настоящего раздела — доказательство существования и единственности решений уравнения (5), а также нахождение процесса $\zeta(t)$, при котором (5) имеет решение.

Единственность

Пусть имеются два решения уравнения (5):

$$\xi_i(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s,\ \xi_i(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s\ \xi_i(s))\, dw(s) + \zeta_i(t), \quad i = 1, 2;$$

причем $\zeta_i(t)$ с вероятностью 1 — непрерывные неотрицательные процессы, а $\zeta_i(t)$ с вероятностью 1 — непрерывные неубывающие процессы, имеющие точками роста только нули $\xi_i(t)$. Тогда $\xi_1(t) = \xi_2(t)$ и $\zeta_1(t) = \zeta_2(t)$ с вероятностью 1.

Доказательство. Введем случайные процессы:

$$\Delta^+(t) = \begin{cases} \xi_1(t) - \xi_2(t), & \text{если } \xi_1(t) - \xi_2(t) > 0; \\ 0 & \text{если } \xi_1(t) - \xi_2(t) \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\Delta^-(t) = \begin{cases} \xi_2(t) - \xi_1(t), & \text{если } \xi_2(t) - \xi_1(t) > 0; \\ 0 & \text{если } \xi_2(t) - \xi_1(t) \leqslant 0. \end{cases}$$

Очевидно, $\Delta^+(t)$ и $\Delta^-(t)$ являются с вероятностью 1 непрерывными процессами. Пусть τ самый правый нуль $\Delta^+(s)$ на отрезке $[t_0, t]$. Тогда при $\tau < t$ будем иметь для всех $s \in [\tau, t]$ неравенство $\Delta^+(s) > 0$ и, значит, $\xi_1(s) > 0$, так как $\xi_1(s) \geqslant \xi_2(s) \geqslant 0$. Поэтому $\zeta_1(\tau) = \zeta_1(t)$ (ведь $\xi_1(s)$ на $[\tau, t)$ не имеет нулей). Так как $\xi_1(s) - \xi_2(s)$ непрерывна, то $\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau) = 0$. Учитывая, что

$$\xi_1(t) - \xi_2(t) = \int_{t_0}^{t} (a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s)))\, ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} (\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s)))\, dw(s) + \zeta_1(t) - \zeta_2(t),$$

а

$$0 = \xi_1(\tau) - \xi_2(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} (a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s)))\, ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{\tau} (\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s)))\, dw(s) + \zeta_1(\tau) - \zeta_2(\tau),$$

заключаем

$$\xi_1(t) - \xi_2(t) = \int_{\tau}^{t} (a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s)))\, ds +$$

$$+ \int_{\tau}^{t} (\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s, \xi_2(s)))\, dw(s) + \zeta_2(\tau) - \zeta_2(t).$$

Но $\xi_1(t) - \xi_2(t) > 0$, а $\zeta_2(\tau) - \zeta_2(t) < 0$, поэтому

$$\Delta^+(t) \leqslant \left| \int_{\tau}^{t} (a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s)))\, ds + \int_{\tau}^{t} (\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s)) \right| dw(s) \Big|.$$

Так что имеем следующую оценку, справедливую и в том случае, когда $\tau = t$ (а, значит, $\Delta^+(t) = 0$):

$$\Delta^+(t) \leqslant \max_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} \left| \int_{t'}^{t} (a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s)))\, ds + \int_{t'}^{t} (\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s)))\, dw(s) \right|.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\Delta^-(t) \leqslant \max_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} \left| \int_{t'}^{t} (a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s)))\, ds + \right.$$

$$\left. + \int_{t'}^{t} (\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s)))\, dw(s) \right|.$$

Так что

$$|\xi_1(t) - \xi_2(t)| \leqslant \max_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} \left| \int_{t'}^{t} (a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s)))\, ds \right| +$$

$$+ \max_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} \left| \int_{t'}^{t} (\sigma(s, \xi_1(s) - \sigma(s, \xi_2(s)))\, dw(s) \right|. \qquad (1.1)$$

Обозначим через $\chi_N(t)$ случайный процесс, определяемый следующим образом:

$$\chi_N(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sup\limits_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} |\xi_1(t')| < N, \ \sup\limits_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} |\xi_2(t')| < N, \\ 0, & \text{если } \sup\limits_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} |\xi_1(t')| \geqslant N, \text{ или } \sup\limits_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} |\xi_2(t')| \geqslant N. \end{cases}$$

Учитывая, что $\chi_N(s) = 1$ при $s \leqslant t$, если только $\chi_N(t) = 1$, можем получить из (1.1) следующее неравенство:

$$|\xi_1(t) - \xi_2(t)|\chi_N(t) \leqslant \max_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} \int_{t'}^{t} \chi_N(s)[a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s))]\,ds +$$

$$+ \max_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} \left| \int_{t'}^{t} \chi_N(s)[\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s))]\,dw(s) \right|.$$

Используя неравенства

$$\left(\int_{t'}^{t} \chi_N(s)[a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s))]^2\,ds \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (t - t') \int_{t'}^{t} [a(s, \xi_1(s)) - a(s, \xi_2(s))]^2 \chi_N(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant K^2(t - \tau) \int_{t'}^{t} |\xi_1(s) - \xi_2(s)|^2 \chi_N(s)\,ds \leqslant K^2(T - t_0) \int_{t_0}^{t} \chi_N(s)|\xi_1(s) - \xi_2(s)|^2\,ds$$

и

$$\max_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} \left| \int_{t'}^{t} \chi_N(s)[\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s))]\,dw(s) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \max_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} \left| \int_{t_0}^{t'} \chi_N(s)[\sigma(s, \xi_1(s) - \sigma(s, \xi_2(s))]\,dw(s) \right|,$$

а также то обстоятельство, что $\int_{t_0}^{t'} \chi_N(s)[\sigma(s\ \ \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s))]\,dw(s)$ является мартингалом по t', и, следовательно, на основании теоремы 3.4 главы 7 из [10]

$$\mathbf{M}\left\{ \sup_{t_0 \leqslant t' \leqslant t} \left| \int_{t_0}^{t'} \chi_N(s)[\sigma(s, \xi_1(s)) - \sigma(s, \xi_2(s))]\,dw(s) \right| \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4\mathbf{M} \left| \int_{t_0}^{t} \chi_N(s)[\sigma(s, \xi_1(s)] - \sigma(s, \xi_2(s))]\,dw(s) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4K^2 \int_{t_0}^{t} \mathbf{M}\chi_N(s)|\xi_1(s) - \xi_2(s)|^2\,ds,$$

мы можем утверждать, что существует такое C, что для всех $t \in [t_0, T]$ выполняется неравенство:

$$\mathbf{M}\chi_N(t)|\xi_1(t) - \xi_2(t)|^2 \leqslant C \int_{t_0}^{t} \mathbf{M}\chi_N(s)|\xi_1(s) - \xi_2(s)|^2\,ds.$$

Из этого неравенства (повторным его применением), учитывая, что $\chi_N(s)|\xi_1(s) - \xi_2(s)| \leqslant 2N$, получим, что при каждом n $\mathbf{M}\chi_N(s)|\xi_1(s) -$

$-\xi_2(s)|^2 \leqslant 4N^2 \frac{C^n}{n!}$. Значит, при каждом N $\mathbf{M}\chi_N(s)|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2 = 0$, т. е. $\mathbf{P}\{\xi_1(s)=\xi_2(s)\}=1$. Учитывая непрерывность $\xi_1(s)$ и $\xi_2(s)$, отсюда выводим, что $\xi_1(s)=\xi_2(s)$ с вероятностью 1. Поэтому и $\zeta_1(s)=\zeta_2(s)$.

Замечание. Уравнение (5) имеет решение лишь при одной функции $\zeta(t)$. Так что для доказательства *существования* решения нам нужно найти хотя бы одно $\zeta(t)$, при котором (5) имело бы решение. Кроме того, независимо от способа решения уравнения всегда будет получаться одно и то же $\zeta(t)$.

Разностные уравнения

Мы будем разыскивать процесс с отражающим экраном как предел решений некоторых конечно-разностных уравнений. Пусть $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$ — некоторое разбиение отрезка $[t_0, T]$. Обозначим $t_{k+1}-t_k = \Delta t_k$, $w(t_{k+1})-w(t_k)=w_k$. Пусть, далее, $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — некоторая последовательность положительных случайных величин, и, наконец, η_0 — случайная величина, не зависящая от $w(t)$. Построим последовательность случайных величин η_k, $k=1, 2, \ldots, n$ по формулам:

$$\eta_k = \eta_{k-1} + \sigma(t_{k-1}, \eta_{k-1})\, w_{k-1} + a(t_{k-1}, \eta_{k-1})\, \Delta t_{k-1} + \\ + \psi_0(\eta_{k-1} + \sigma(t_{k-1}, \eta_{k-1})\, w_{k-1} + a(t_{k-1}, \eta_{k-1})\, \Delta t_{k-1})\, h_k, \qquad (1.2)$$

где $\psi_0(x)=1$ при $x \leqslant 0$ и $\psi_0(x)=0$ при $x>0$. Свяжем с этой последовательностью величин случайный процесс: $\eta(t)=\eta_k$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k=0, 1, \ldots, n-1$. Наша цель — показать, что при $\max \Delta t_k \to 0$ процесс $\eta(t)$ сходится по вероятности к некоторому процессу, являющемуся решением уравнения (5).

Для этого нам нужно будет оценить разность между $\eta(t)$ и $\eta'(t)$, где $\eta'(t)=\eta'_l$ при $t \in [t'_l t'_{l+1})$, $l=0, 1, \ldots, m$; последовательность η'_l определяется соотношением

$$\eta'_l = \eta'_{l-1} + \sigma(t'_{l-1}, \eta'_{l-1})\, w'_{l-1} + a(t'_{l-1}, \eta'_{l-1})\, \Delta t'_{l-1} + \\ + \psi_0(\eta'_{l-1} + \sigma(t'_{l-1}, \eta'_{l-1})\, w'_{l-1} + a(t'_{l-1}, \eta'_{l-1})\, \Delta t'_{l-1})\, h'_l,$$

в котором η'_0 не зависит от $w(t)$, $\Delta t'_l = t'_{l+1}-t'_l$, $w'_l = w(t'_{l+1})-w(t'_l)$, и $h'_1, \ldots, h'_m$ — последовательность положительных случайных величин, а $t_0=t'_0<t'_1<\ldots<t'_m$ — некоторое разбиение отрезка $[t_0, T]$. Положим

$$\Delta^+(t) = \begin{cases} \eta(t)-\eta'(t), & \text{если } \eta(t) > \eta'(t), \\ 0, & \text{если } \eta(t) \leqslant \eta'(t); \end{cases}$$

$$\Delta^-(t) = \begin{cases} \eta'(t)-\eta(t), & \text{если } \eta'(t) > \eta(t), \\ 0, & \text{если } \eta'(t) \leqslant \eta(t). \end{cases}$$

Оценим $\Delta^-(t)$ в том случае, когда $\Delta^-(t)>0$. Предположим сначала, что $\Delta^+(s)>0$ для всех $s \in [t_0, t]$. Тогда возможен один из трех случаев:

а) $\psi_0(\eta_{k-1} + \sigma(t_{k-1}, \eta_{k-1})\, w_{k-1} + a(t_{k-1}, \eta_{k-1})\, \Delta t_{k-1}) = 0$ для всех k, для которых $t_k \leqslant t$, тогда

$$\Delta^+(t) = \eta_0 - \eta'_0 + \sum_{t_k \leqslant t} (\sigma(t_{k-1}, \eta_{k-1})\, w_{k-1} + a(t_{k-1}, \eta_{k-1})\, \Delta t_{k-1} -$$

$$- \sum_{t'_l \leqslant t} (\sigma(t'_{l-1}, \eta'_{l-1}) w_{l+1} + a(t'_{l-1}, \eta'_{l-1}) \Delta t'_{l-1}) -$$

$$- \sum_{t'_l \leqslant t} \psi_0(\eta'_{l-1} + \sigma(t'_{l-1}, \eta'_{l-1}) w'_{l-1} + a(t'_{l-1}, \eta'_{l-1}) \Delta t'_{l-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \eta_0 + \eta'_0 + \sum_{t_k \leqslant t} (\sigma(t_{k-1}, \eta_{k-1}) w_{k-1} + a(t_{k-1}, \eta_{k-1}) \Delta t_{k-1}) -$$

$$- \sum_{t'_l \leqslant t} (\sigma(t'_{l-1}, \eta'_{l-1}) w'_{l-1} + a(t'_{l-1}, \eta'_{l-1}) \Delta t'_{l-1});$$

б) $\psi_0(\eta_{k-1} + \sigma(t_{k-1}, \eta_{k-1}) w_{k-1} + a(t_{k-1}, \eta_{k-1}) \Delta t_{k-1}) > 0$ при некоторых k; пусть r означает наибольший индекс, для которого $t_r \leqslant t$ и $\psi_0(\eta_{r-1} + \sigma(t_{r-1}, \eta_{r-1}) w_{r-1} + a(t_{r-1}, \eta_{r-1}) \Delta t_{r-1}) > 0$, тогда при $k > r$ $\psi_0(\eta_{k-1} + \sigma(t_{k-1}, \eta_{k-1}) w_{k-1} + a(t_{k-1}, \eta_{k-1}) \Delta t_{k-1}) = 0$ и, значит, на основании случая а) мы можем заключить, что

$$\Delta^+(t) \leqslant \eta(t_r) - \eta'(t_r) + \sum_{t_r < t_k \leqslant t} \sigma(t_{k-1}, \eta_{k-1}) w_{k-1} +$$

$$+ a(t_{k-1}, \eta_{k-1}) \Delta t_{k-1} - \sum_{t_r < t'_l \leqslant t} (\sigma(t'_{l-1}, \eta'_{l-1}) w'_{l-1} + a(t'_{l-1}, \eta'_{l-1}) \Delta t'_{l-1}),$$

но $\eta(t_r) - \eta'(t_r) \leqslant h_r$, а $-\eta'(t_r) \leqslant -\inf_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \eta'(t) \psi_0(\eta'(t))$, следовательно, получаем:

$$\Delta^+(t) \leqslant h_r - \inf_{t_0 \leqslant t-T} \eta'(t) \psi_0(\eta'(t)) + \sum_{t_r < t_k \leqslant t} (\sigma(t_{k-1}, \eta_{k-1}) w_{k-1} +$$

$$+ a(t_{k-1}, \eta_{k-1}) \Delta t_{k-1} - \sum_{t_r < t'_l \leqslant t} (\sigma(t'_{l-1}, \eta'_{l-1}) w'_{l-1} + a(t'_{l-1}, \eta'_{l-1}) \Delta t'_{l+1}).$$

На основании а) и б) заключаем, что в том случае, когда $\Delta^+(s) > 0$ для всех $s \in [t_0, t]$, справедливо неравенство

$$\Delta^+(t) \leqslant |\eta_0 - \eta_0| + \sup_{1 \leqslant r \leqslant n} h_r - \inf_{t_0 \leqslant s \leqslant T} \eta'(s) \psi_0(\eta'(s)) +$$

$$+ \sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t} \left| \sum_{s < t_{k-1} \leqslant t} (\sigma(t_{k-1}, \eta_{k-1}) w_{k-1} + a(t_{k-1}, \eta_{k-1}) \Delta t_{k-1}) - \right.$$

$$\left. - \sum_{s < t'_l \leqslant t} (\sigma(t_{l-1}, \eta'_{l-1}) w'_{l-1} + a(t'_{l-1}, \eta'_{l-1}) \Delta t'_{l-1}) \right|.$$

Пусть теперь $\Delta^+(t) > 0$, но $\Delta^+(s)$ обращается в нуль при $s < t$. Обозначим через τ максимальную точку на $[t_0, t]$, для которой $\Delta^+(\tau - 0) = 0$, а $\Delta^+(\tau + 0) > 0$. Тогда, очевидно, $|\eta(\tau) - \eta'(\tau)| \leqslant \max_k |\eta_k - \eta_{k-1}| + \max_l |\eta'_l - \eta'_{l-1}|$. Так как на $[\tau, t]$, $\Delta^+(s) > 0$, то применимы оценки, полученные в случаях а) и б). Так что в общем случае имеем следующее неравенство:

$$\Delta^+(t) \leqslant |\eta_0 - \eta'_0| + \sup_{1 \leqslant r \leqslant n} h_r + \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\eta_k - \eta_{k-1}| -$$

$$- \inf_{t_0 \leqslant s \leqslant T} \eta'(s) \psi_0(\eta'(s)) + \max_{1 \leqslant l \leqslant m} |\eta_l - \eta_{l-1}| +$$

$$+\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\left|\sum_{s<t_{k-1}\leqslant t}(\sigma(t_{k-1},\ \eta_{k-1})\,w_{k-1}+a(t_{k-1},\ \eta_{k-1})\,\Delta t_{k-1})-\right.$$

$$\left.-\sum_{s\leqslant t'_l\leqslant t}(\sigma(t'_{l-1},\ \eta_{l-1})\cdot w'_{l-1}+a(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})\,\Delta t'_{l-1})\right|. \tag{1.3}$$

аписав аналогичную оценку для $\Delta^-(t)$, мы получим для $|\eta(t)-\eta'(t)|=\max(\Delta^+(t),\ \Delta^-(t))$ следующее неравенство:

$$|\eta(t)-\eta'(t)|\leqslant|\eta_0-\eta'_0|+\sup_{1\leqslant r\leqslant n}h_r+\sup_{1\leqslant r\leqslant m}h'_r+$$

$$+\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|\eta_k-\eta_{k-1}|+\sup_{1\leqslant l\leqslant m}|\eta'_{l-1}-\eta'_l|-$$

$$-\inf_{t_0\leqslant t\leqslant T}\eta(s)\,\psi_0(\eta(s))-\inf_{t_0\leqslant t\leqslant T}\eta'(s)\,\psi_0(\eta'(s))+$$

$$+\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\left|\sum_{s<t_{k-1}\leqslant t}(\sigma(t_{k-1},\ \eta_{k-1})\,w_{k-1}+a(t_{k-1},\ \eta_{k-1})\,\Delta t_{k-1}-\right.$$

$$\left.-\sum_{s<t'_{l-1}\leqslant t}(\sigma(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})\,w'_{l-1}+a(t'_{l-1},\ \eta'_{l-1})\,\Delta t'_{l-1})\right|. \tag{1.4}$$

удем считать теперь, что подразделение $t'_0<t'_1<\ldots<t'_m$ получается из одразделения $t_0<t_1<\ldots<t_n$ добавлением некоторых точек. Преобразуем умму, стоящую под знаком модуля в (1.4). Пусть $t_r\leqslant s<t_{r+1}$, $t'_q\leqslant s<t'_{q+1}$, огда

$$\sum_{t_k\leqslant s}\sigma(t_k,\ \eta_k)\,w_k-\sum_{t'_l\leqslant s}\sigma(t'_l,\ \eta'_l)\,w_l=$$

$$=\sum_{t_k\leqslant s}\sum_{t_{k-1}\leqslant t'_l<t_k}(\sigma(t'_l,\ \eta_{k-1})-\sigma(t'_l,\ \eta_e))\,w'_l+$$

$$+\sum_{t_r\leqslant t'_l\leqslant s}(\sigma(t'_l,\ \eta_r)-\sigma(t'_l,\ \eta'_l))\,w'_l+$$

$$+\sum_{t_k\leqslant s}\sum_{t_{k-1}\leqslant t'_l<t_k}[\sigma(t_{k-1},\ \eta_{k-1})-\sigma(t'_l,\ \eta_{k-1})]\,w'_l+$$

$$+\sum_{t_r\leqslant t'_l\leqslant s}(\sigma(t_{r-1},\ \eta_r)-\sigma(t'_l,\ \eta_l))\,w'_l+\sigma(t_r,\ \eta_r)\,[w(t_{r+1})-w(t'_{q+1})].$$

Преобразовав аналогичным образом $\sum_{t_k\leqslant s}a(t_k,\ \eta_k)\,\Delta t_k-\sum_{t'_l\leqslant s}a(t'_l,\ \eta'_l)\,\Delta t'_l$ и воспользовавшись неравенством: $\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_k^n a_i\right|\leqslant 2\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_1^k a_i\right|$, получим такую оценку:

$$|\eta(t)-\eta'(t)|\leqslant|\eta_0-\eta'_0|+\sup_{1\leqslant r\leqslant n}h_r+\sup_{1\leqslant r\leqslant m}h'_r-$$

$$-\inf_{t_0\leqslant s\leqslant T}\eta(s)\,\psi_0(\eta(s))-\inf_{t_0\leqslant s\leqslant T}\eta'(s)\,\psi_0(\eta'(s))+$$

$$+\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\eta_k-\eta_{k-1}|+\max_{1\leqslant l\leqslant m}|\eta'_l-\eta_{l-1}|+$$

$$+2\sup_{1\leqslant j\leqslant n,\, t\in[t_0,T]}\sigma(t,\eta_j)\max_{|s_2+s_1|\leqslant\max\Delta t_k}|w(s_2)-w(s_1)|+$$

$$+2\sup_{1\leqslant j\leqslant n,\, t\in[t_0,T]}|a(t,\eta_j)|\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta t_k+2\sup_{s\leqslant t}\Big|\sum_{t'_l<s}(\sigma(t'_l,\eta(t'_l))-\sigma(t'_l,\eta'(t'_l))w'_l\Big|$$

$$2\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Big|\sum_{t'_l<s}(a(t'_l,\eta(t'_l))-a(t'_l,\eta'(t'_l))\Delta t'_l)\Big|+$$

$$+2\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Big|\sum_{t_k\leqslant t'_l<t_{k+1}\leqslant s}(\sigma(t_k,\eta_k)-\sigma(t'_l,\eta_k))w'_l\Big|+$$

$$+2\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Big|\sum_{t_k\leqslant t'_l<t_{k+1}\leqslant s}(a(t_k,\eta_k)-a(t'_l,\eta_k))\Delta t'_l\Big|. \qquad (1.$$

Поступила в редакцию
15.9.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Принципы теории стохастических дифференциальных уравн ний, Труды Физ-мат. ин-та АН СССР, 5 (1931), 95—124.
[2] И. И. Гихман, К теории дифференциальных уравнений случайных процессо УМЖ, 2, 3 (1950), 45—69.
[3] И. И. Гихман, К теории дифференциальных уравнений случайных процессов, I УМЖ, 3 (1951), 317—339.
[4] K. Ito, On stochastic differential equations, Mem Am. Math. Soc. 4 (1951), 1—5
[5] G. Maruyama, Continuous Markov processes and stochastic equations, Rend. Cir Math. Palermo, 4 (1955), 1—43.
[6] J. Doob, Martingales and one demensional diffusion, Tr. AMS, 78 (1955), 168—20
[7] W. Feller, Diffusion processes in one demension, Trans. OMS, 77 (1954), 1(3
[8] W. Feller, The generale diffusion operator and positivity preserving semigroup in one demension, Ann. Math., 60 (1954), 417—435.
[9] А. Д. Вентцель, Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дис ференциальному оператору второго порядка, ДАН СССР, **111** (1956), 269—272.
[10] Дж. Дуб, Вероятностные процессы, ИИЛ, М., 1956.
[11] А. В. Скороход, Предельные теоремы для случайных процессов с независимым приращениями, Теория вероят. и ее примен., **11**, 2 (1957), 145—177.
[12] Е. Е. Слуцкий, Alcuni proposizioni sulla teoria degli funzioni aleatorie, Giorn. Ins Attuorie, 8 (1937), 183—199.
[13] А. В. Скороход, О дифференцируемости мер, соответствующих случайным пр цессам, II, Процессы Маркова, Теория вероят. и ее примен., **V**, 1 (1960), 45—53.

STOCHASTIC EQUATIONS FOR DIFFUSION PROCESSES IN A BOUNDED REGIO

A. V. SKOROHOD (KIEV)

(Summary)

In this paper an equation is derived for diffusion processes with a reflecting bou dary; it is proved that the solution to this equation exists and is unique.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том VI Выпуск 3
1961

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РАЗМЕРОВ ЧАСТИЦ ПРИ ДРОБЛЕНИИ

А. Ф. ФИЛИППОВ

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

Изучается изменение во времени совокупности частиц $\{e\}$ при следующих условиях:

1°. Каждая частица e характеризуется положительным числом $\mu(e)$. В дальнейшем $\mu(e)$ называется массой* частицы e.

2°. В начальный момент $t = 0$ имеется конечное или счетное число частиц, сумма их масс равна $M_0 < \infty$.

3°. С течением времени совокупность частиц меняется так: в случайные моменты времени та или иная частица e превращается (будем говорить: дробится*) в конечное или счетное число частиц e_k, $k = 1, 2, \ldots$, для каждой из которых $\mu(e_k) < \mu(e)$.

4°. Каждая частица e, имеющаяся в момент времени t, за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ может раздробиться (независимо от ее прошлого и от судьбы других частиц) с вероятностью $p(x)\Delta t + o(\Delta t)$, где $x = \mu(e)$, а функция $p(x)$ зависит только от x и ограничена на любом интервале вида $\delta \leq x \leq N$, где $\delta > 0$, $N < \infty$.

5°. Число и массы частиц, возникающих при одном дроблении частицы e, являются случайными величинами. Обозначим

$$\mu(e) = \xi, \quad \mu(e_k) = \xi_k \ (k = 1, 2, \ldots), \frac{1}{\xi} \sum_{\xi_k < x} \xi_k = \Phi(\xi, x),$$

тогда $\xi\Phi(\xi, x)$ — сумма масс частиц, массы которых менее x, и которые образуются из частицы массы ξ за одно дробление. Предполагается, что математические ожидания

$$\mathbf{M}\Phi(\xi, x) = F(\xi, x) \text{ и } \mathbf{M}\Phi(\xi, x_1)\Phi(\xi, x_2) = B(\xi, x_1, x_2)$$

заданы и зависят только от указанных аргументов. Очевидно,

$$F(\xi, +0) = 0, \ B(\xi, +0, x_2) = B(\xi, x_1, +0) = 0.$$

---

* Излагаемые в статье результаты могут иметь и другие применения, если массу заменить какой-либо иной характеристикой частицы, например энергией, а механическое дробление — любым способом порождения одной частицей нескольких (см., например, [11], стр. 104—109).

6°. Сумма масс частиц, получающихся из одной частицы при одном дроб лении, равна массе этой частицы, т. е. $\Phi(\xi, \xi) = 1$ (в § 7 рассматривае ся более общий случай, когда при каждом дроблении масса может мен ться).

При этих условиях в § 2 и § 3 выводятся уравнения для величин характеризующих процесс дробления частиц и устанавливается связь эти уравнений с уравнениями более простого марковского процесса — процесс скачкообразного движения точки по прямой линии.

В §§ 4 — 6 дополнительно предполагается, что

7°. $p(x) = x^n$.

8°. $F(\xi, x)$ зависит только от отношения x/ξ, т. е. $F(\xi, \lambda\xi) = f(\lambda)$.

9°. $B(\xi, x_1, x_2)$ зависит только от отношений x_1/ξ и x_2/ξ.

10°. $\int_0^1 \frac{f(\lambda)}{\lambda} d\lambda$ сходится.

11°. $f'(\lambda) > 0$ на множестве положительной меры.

В этих условиях устанавливается, что при $t \to \infty$ закон распределени частиц по их массе сходится к некоторому предельному закону (А. Н. Кол могоров [1] доказал это в случае $p(x) = \text{const}$), и указывается практическ удобный способ приближенного вычисления этого закона. В том частном случае, когда $f(\lambda) = b\lambda^k$, $k > 0$, этот предельный закон пишется в явном виде (§ 8).

В § 9 изучается явление «распыления» массы в бесконечно большое чис ло частиц нулевой массы в тех случаях, когда скорость дробления частиц (функция $p(x)$) достаточно быстро возрастает с убыванием ее массы. При этом сумма масс всех частиц отличной от нуля массы будет убывать с те чением времени, несмотря на то, что при каждом отдельном дроблении масса сохраняется. В реальном физическом процессе этого не происходит, так как при очень малых массах проявляются новые свойства частиц, не учитываемые нашей схемой. Однако, если мы интересуемся только частица ми массы не менее $\delta > 0$, то такие схемы могут с хорошим приближением описывать реальные процессы, в которых при $x < \delta$ функция $p(x)$ возра стает, а частицы массы $< \delta$ не влияют на частицы массы $> \delta$ и не прев ращаются в них*.

Тема этой статьи была предложена А. Н. Колмогоровым, которому я глубоко благодарен за руководство и помощь в работе.

§ 2. Вывод уравнений процесса

Пусть выполнены условия 1° — 6° § 1. Обозначим через $R(x, t)$ сумму масс частиц массы $\geq x$, имеющихся в момент t. Так как распределение частиц в начальный момент $t = 0$ задано, то $R(x, 0)$ известно; в силу 2° $R(x, 0) = 0$ при $x > M_0$. Рассмотрим, как может измениться величина $R(x, t)$ за время от t до $t + \Delta t$. Частица массы ξ_m за это время может раздробиться с вероятностью $p(\xi_m)\Delta t + o(\Delta t)$, тогда $R(x, t)$ получит при-

* Доклад с изложением результатов этой статьи был сделан на семинаре по теории вероятностей в МГУ весной 1952 г.

ащение $\Delta R(x, t) = -\xi_m \Phi(\xi_m, x)$ (если $\xi_m \geqslant x$). Вероятность того, что за то время с частицами массы $\geqslant x$ произойдет более одного дробления, равна $o(\Delta t)$ (так как в силу 2° и 3° таких частиц конечное число). Поэтому словное математическое ожидание $\Delta R(x, t)$ при условии, что $R(x, t)$ задано, равно

$$-\Delta t \sum_{\xi_m \geqslant x} \xi_m [\mathbf{M}\Phi(\xi_m, x)] p(\xi_m) + o(\Delta t) = \Delta t \int_x^\infty p(\xi) F(\xi, x) d_\xi R(\xi, t) + o(\Delta t).$$

Переходя к безусловным математическим ожиданиям, получим при $\Delta t \to 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}R(x, t) = \int_x^\infty p(\xi) F(\xi, x) d_\xi \mathbf{M}R(\xi, t). \tag{1}$$

Положим $M(x, t) = M_0 - R(x, t)$ Если сумма масс всех частиц с течением времени не меняется, то $M(x, t)$ — сумма масс частиц массы $\leqslant x$, имеющихся в момент t. Из (1) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}M(x, t) = \int_x^\infty p(\xi) F(\xi, x) d_\xi \mathbf{M}M(\xi, t). \tag{2}$$

Начальные условия: $\mathbf{M}M(x, 0) = M(x, 0) = M_0 - R(x, 0)$. Существование и единственность решения уравнения (2) доказаны в § 3. Если выполнены также условия 7° и 8°, то (2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}M(x, t) = \int_x^\infty \xi^n f\left(\frac{x}{\xi}\right) d_\xi \mathbf{M}M(\xi, t). \tag{3}$$

Аналогично выводится уравнение для вторых моментов. Пусть $S(x_1, x_2, t) = \mathbf{M}R(x_1, t) R(x_2, t)$. Получим

$$\frac{\partial}{\partial t} S(x_1, x_2; t) = \int_{x_1}^\infty p(\xi) F(\xi, x_1) d_\xi S(\xi, x_2, t) +$$

$$+ \int_{x_2}^\infty p(\xi) F(\xi, x_2) d_\xi S(\xi, x_1, t) - \int_{\max(x_1, x_2)}^\infty p(\xi) B(\xi, x_1, x_2) \xi d_\xi \mathbf{M}R(\xi, t);$$

$$S(x_1, x_2, 0) = R(x_1, 0) R(x_2, 0).$$

Существование и единственность решения в классе функций S, равных нулю при $x_1 > M_0$ и при $x_2 > M_0$, доказывается так же, как для уравнения (1). Уравнения для $\mathbf{M}M$ и S в случае, когда выполнены условия 8° и 9° § 1 и $p(x) \equiv 1$, решаются в [11] § 3.42.

Выведем теперь другие уравнения, которые будут нужны в § 6. Пусть выполнены условия 1° — 9° § 1, и пусть при $t = 0$ имеется только одна частица и ее масса равна 1; величины $M(x, t)$, $R(x, t)$ и $S(x_1, x_2, t)$ в этом случае обозначим $m(x, t)$, $r(x, t)$ и $s(x_1, x_2, t)$; дисперсии величин $m(x, t)$ и $r(x, t)$ равны, обозначим их $D(x, t)$.

Покажем, что если при $t = 0$ имеется одна частица, но массы не 1, а

ξ_1, то

$$\mathbf{M}R(x, t) = \xi_1 \mathbf{M}r\left(\frac{x}{\xi_1}, t\xi_1^n\right), \quad S(x_1, x_2, t) = \xi_1^2 s\left(\frac{x_1}{\xi_1}, \frac{x_2}{\xi_1}, t\xi_1^n\right). \qquad (4)$$

В самом деле, функция $\mathbf{M}R(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1), где $p(\xi) = -\xi^n$, $F(\xi, x) = f(x/\xi)$, и начальному условию $\mathbf{M}R(x, 0) = \xi_1$ при $x \leqslant \xi_1$, $\mathbf{M}R(x, 0) = 0$ при $x > \xi_1$; функция $\mathbf{M}r(x, t)$ удовлетворяет тому же уравнению и начальному условию $\mathbf{M}r(x, 0) = 1$ при $x \leqslant 1$, $\mathbf{M}r(x, 0) = 0$ при $x > 1$. Следовательно, обе части первого из равенств (4) удовлетворяют одному и тому же уравнению и начальному условию. В силу единственности решения они совпадают при всех $t \geqslant 0$. Второе из равенств (4) доказывается аналогично.

Если при $t = 0$ имеется только одна частица и ее масса равна 1, то возможны следующие случаи:

1) с вероятностью $1 - \Delta t + o(\Delta t)$ за время Δt не произойдет дробления. Тогда математическое ожидание суммы масс частиц массы $\geqslant x$, получившихся за оставшееся время $t - \Delta t$, равно $\mathbf{M}r(x, t - \Delta t)$;

2) с вероятностью $\Delta t + o(\Delta t)$ за время Δt произойдет дробление, а те из полученных частиц, массы которых $\geqslant x$, еще не успеют раздробиться. Тогда математическое ожидание суммы масс частицы массы $\geqslant x$, получившихся за оставшееся время $t - \Delta t$ из каждой частицы массы $\xi_i \geqslant x$, равно $\xi_i \mathbf{M}r[x/\xi_i, (t - \Delta t)\xi_i^n]$, а из всех частиц — равно

$$\sum_{\xi_i \geqslant x} \xi_i \mathbf{M}r\left[\frac{x}{\xi_i}, (t - \Delta t)\xi_i^n\right] = \int_x^1 \mathbf{M}r\left[\frac{x}{\xi}, (t - \Delta t)\xi^n\right] d\Phi(1, \xi) \qquad (5)$$

при условии, что массы ξ_i частиц заданы. Если же отказаться от последнего условия и учесть, что $\mathbf{M}\Phi(1, \xi) = F(1, \xi) = f(\xi)$, то математическое ожидание выражения (5) будет равно:

$$\int_x^1 \mathbf{M}r\left(\frac{x}{\xi}, (t - \Delta t)\xi^n\right) df(\xi);$$

3) С вероятностью $o(\Delta t)$ за время Δt раздробится не только первоначальная частица массы 1, но и по крайней мере одна из полученных частиц массы $\geqslant x$.

Переходя к безусловному математическому ожиданию, получим из 1) — 3)

$$\mathbf{M}r(x, t) = (1 - \Delta t)\mathbf{M}r(x, t - \Delta t) + \Delta t \int_x^1 \mathbf{M}r\left(\frac{x}{\xi}, (t - \Delta t)\xi^n\right) df(\xi) + o(\Delta t).$$

Так как $\mathbf{M}r(y, \tau) = 0$ при $y > 1$, то нижний предел интеграла можно заменить нулем. Полагая $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{\partial \mathbf{M}r(x, t)}{\partial t} = -\mathbf{M}r(x, t) + \int_0^1 \mathbf{M}r\left(\frac{x}{\xi}, t\xi^n\right) df(\xi), \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}m(x, t)}{\partial t} = -\mathbf{M}m(x, t) + \int_0^1 \mathbf{M}m\left(\frac{x}{\xi}, t\xi^n\right) df(\xi). \qquad (7)$$

Аналогично выводится уравнение для $\mathbf{M}r^2(x, t)$:

$$\frac{\partial \mathbf{M}r^2(x, t)}{\partial t} = -\mathbf{M}r^2(x, t) + \int_0^1\int_0^1 \mathbf{M}r\left(\frac{x}{\xi}, t\xi^n\right)\mathbf{M}r\left(\frac{x}{\eta}, t\eta^n\right)dB(1, \xi, \eta) +$$

$$+ \int_0^1 D\left(\frac{x}{\xi}, t\xi^n\right)\xi df(\xi). \qquad (8)$$

Пользуясь соотношениями $D = \mathbf{M}r^2 - (\mathbf{M}r)^2$, $\Phi(1, 1) = 1$, $f(\xi) = F(1, \xi) = B(1, \xi, 1) - B(1, \xi, 0)$, получим из (6) и (8)

$$\frac{\partial}{\partial t}D(x, t) = -D(x, t) + \int_0^1 D\left(\frac{x}{\xi}, t\xi^n\right)\xi df(\xi) +$$

$$+ \int_0^1\int_0^1 \left[\mathbf{M}r(x, t) - \mathbf{M}r\left(\frac{x}{\xi}, t\xi^n\right)\right]\left[\mathbf{M}r(x, t) - \mathbf{M}r\left(\frac{x}{\eta}, t\eta^n\right)\right]dB(1, \xi, \eta). \qquad (9)$$

§ 3. Связь процесса дробления частиц с одномерным марковским случайным процессом

Рассмотрим марковский процесс следующего типа. Функция $\omega(t)$ совершает скачки в случайные моменты времени t, оставаясь постоянной в промежутках между скачками. Если $\omega(t) = \eta$, то в течение промежутка времени $(t, t + \Delta t)$ функция ω может с вероятностью $1 - p(\eta)\Delta t + o(\Delta t)$ оставаться постоянной, с вероятностью $p(\eta)\Delta t + o(\Delta t)$ совершить один скачок, с вероятностью $o(\Delta t)$ — более одного скачка; функция $p(\eta)$ предполагается непрерывной в рассматриваемой области. Если скачок произошел в момент t и перед скачком функция $\omega(t)$ была равна η, то после скачка она будет меньше y с вероятностью $F(\eta, y)$, где $F(\eta, y)$ — функция распределения относительно y. Предположим еще, что $F(\eta, y) = 1$ при $y \geqslant \eta$ (т. е. все скачки отрицательны), и что $F(\eta, a + 0) = 0$ (т. е. $F(\eta, y) \to 0$ при $y \to a$, $y > a$); это значит, что после каждого отдельного скачка функция $\omega(t)$ не выходит из области $y > a$, в которой рассматривается марковский процесс (здесь $a \geqslant -\infty$). Тогда $P(t_0, y_0; t, y)$ (вероятность того, что $\omega(t) < y$ при условии $\omega(t_0) = y_0$) удовлетворяет уравнению (21) статьи [2], которое в нашем случае принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t_0, y_0; t, y) = \int_y^\infty p(\eta)F(\eta, y)d_\eta P(t_0, y_0; t; \eta); \qquad (10)$$

$$P(t_0, y_0; t_0, y) = 0 \text{ при } y \leqslant y_0, \quad P(t_0, y_0; t_0, y) = 1 \text{ при } y > y_0. \qquad (11)$$

Существование и единственность решения доказаны в [2] для случая, когда $p(\eta)$ ограничена, $p(\eta)$ и $F(\eta, y)$ — B-измеримы по η, и в [12] — для более общего случая.

Рассмотрим теперь случай произвольной непрерывной функции $p(\eta)$. Возьмем две последовательности: убывающую $a_i \to a$ и возрастающую $b_i \to \infty$, $b_i > y_0$. Построим в области $y > a$ непрерывную и ограниченную функцию $p_i(y)$, равную $p(y)$ в области $R_i(a_i \leqslant y \leqslant b_i)$. Рассмотрим марковский процесс, получающийся из предыдущего заменой p на p_i. Согласно

[2] он описывается уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i(t_0, y_0; t, y) = \int_y^\infty p_i(\eta) F(\eta, y) d_\eta P_i(t_0, y_0; t, \eta), \qquad (1$$

$$P_i(t_0, y_0; t_0, y) = 0 \text{ при } y \leqslant y_0, \; P_i(t_0, y_0; t_0, y) = 1 \text{ при } y > y_0; \qquad (1$$

решение существует и единственно в классе функций ограниченной вари ции по y. В области R_i этот процесс совпадает с ранее рассмотренны процессом, так как все скачки функции $\omega(t)$ отрицательны, а ее начал ное значение y_0 принадлежит R_i. С другой стороны, решение уравнен (12), (13) в области $y > a_i$ удовлетворяет также уравнению (10), (11), ес $P_i(t_0, y_0; t, y) = \text{const}$ при всех $y > y_0$. Любая точка области $y > a$ п достаточно большом i попадает в R_i и, начиная с этого i, в данной точ функция P_i уже не будет меняться. Следовательно, в области $y > a$ п $i \to \infty$ существует $\lim P_i = P$, который удовлетворяет уравнению (10), (1 Решение этого уравнения единственно в классе функций ограниченной в риации по y, равных постоянной* при всех $y > y_0$, $t \geqslant t_0$, так как люб такое решение в области R_i совпадает с единственным решением уравнен (12), (13).

Возможны два случая:

1) $P \to 0$ при $y \to a + 0$ и любом постоянном $t \geqslant t_0$. В этом случа $P(t_0, y_0; t, y)$ является функцией распределения относительно y и выр жает вероятность того, что $\omega(t) < y$ при условии $\omega(t_0) < y_0$. Значит, этом случае при любом t, с вероятностью 1, функция $\omega(t)$ будет больш a, т. е. не выйдет из области $y > a$, в которой рассматривается процес Можно показать, что за любое конечное время функция $\omega(t)$, с вероя ностью 1, совершает конечное число скачков.

2) При некотором $t > t_0$ имеем $\lim\limits_{y \to a+0} P > 0$. В этом случае можно област $y > a$, в которой рассматривается процесс, дополнить «несобственным эл ментом» $y = a$, и положить $P = 0$ при $y = a$ и всех t. Тогда функци $P(t_0, y_0; t, y)$ опять будет выражать вероятность того, что $\omega(t) < y$ п условии $\omega(t_0) = y_0$, но в этом случае при некотором t функция $\omega(t)$, положительной вероятностью, может стать равной a, т. е. выйти из об ласти, в которой первоначально рассматривался процесс; при этом функци $\omega(t)$ за конечное время совершит бесконечное число скачков, так ка конечное число скачков, с вероятностью 1, не выводит ω из област $y > a$.

Назовем процесс регулярным, если в рассматриваемой области решени уравнения (10) существует, единственно и является функцией распредел ния по y. Тогда в случае 1) в области $a < y < N$, где $N < \infty$, процес регулярный (но в области $a < y < \infty$ он может быть нерегулярным, см предыдущую сноску), а в случае 2) нерегулярный. Так как уравнение (1 совпадает с уравнением (2), то из предыдущего вытекает существовани и единственность (в классе функций ограниченной вариации по x, постоя

---

* Без этого ограничения решение может не быть единственным. Например, две фун ции $P = 0$ и $P = 1 - \exp(-ty^n)$, где $n > 0$, удовлетворяют уравнению (10) при $p(\eta) = \eta$ $F(\eta, y) = (y/\eta)^n$ и начальному условию $P(0, y) = 0$.

ых при $x > M_0$) решения уравнения (2) с начальными условиями

$$\mathbf{M}M(x,\ 0) = 0\ \ (x \leqslant M_0),\ \ \mathbf{M}M(x,\ 0) = M_0\ (x > M_0), \tag{14}$$

значающими, что при $t = 0$ имеется одна частица, и ее масса равна M_0. силу линейности уравнения (2) это справедливо и для таких начальных словий, как в п. 2° § 1.

В случае нерегулярности марковского процесса (10) приходится счи-ать, что с положительной вероятностью конечная часть первоначальной ассы M_0 может раздробиться в бесконечное число частиц, каждая из ко-орых имеет нулевую массу (см. конец § 1).

Итак, уравнение для величины $\mathbf{M}M(x,\ t)$ в процессе дробления частиц овпадает с уравнением для вероятности перехода в некотором одномерном исто разрывном марковском процессе.

Заметим еще, что уравнение (7) соответствует уравнению (20) статьи [2] ак же, как (3) соответствует уравнению (21) статьи [2] ((20) и (21) — соот-етственно «первое» и «второе» дифференциальные уравнения марковского роцесса).

В случае $n > 0$ преобразуем (3) в уравнение, имеющее стационарное не зависящее от времени) решение, сделав замену переменных: $x^n = e^{z-T}$, $\xi^n = e^{\eta-T}$, $t = e^T - 1$,

$$\mathbf{M}M(x,\ t) = M_0 Q(z,\ T),\ f\left(\frac{x}{\xi}\right) = K(z-\eta).$$

Получим из (3) и (14)

$$\frac{\partial Q(z,\ T)}{\partial T} + \frac{\partial Q(z,\ T)}{\partial z} = \int_z^\infty e^\eta K(z-\eta)\, d_\eta Q(\eta,\ T), \tag{15}$$

$$Q(z,\ 0) = 0 \quad (z \leqslant n \ln M_0), \qquad Q(z,\ 0) = 1 \quad (z > n \ln M_0).$$

Несмотря на разрывность функции Q, уравнение (15) имеет смысл, если его левую часть понимать как производную по направлению. Это уравнение соответствует марковскому процессу следующего типа: $\omega(t)$ непрерывно возрастает со скоростью 1, но иногда происходят отрицательные скачки и их величины распределены по одному и тому же закону $K(z)$; если $\omega(T) = \eta$, то вероятность скачка за время от T до $T + \Delta T$ равна $e^\eta \Delta T + o(\Delta T)$.

§ 4. Доказательство существования стационарного решения

Покажем, что при условии 10° уравнение (15) имеет решение вида $Q(z,\ T) = Q(z)$, $Q(-\infty) = 0$, $Q(\infty) = 1$, т. е. что уравнение (3) имеет решение вида $\mathbf{M}M(x,\ t) = G[(t+1)\,x^n]$. Полагая в (3) $(t+1)\,x^n = u$, $(t+1)\,\xi^n = v$, $\mathbf{M}M(x,\ t) = G(u)$, $f(\lambda) = f_1(\lambda^n)$, получим

$$uG'(u) = \int_u^\infty f_1\left(\frac{u}{v}\right) v\, dG(v), \quad G(0) = 0, \quad G(\infty) = 1, \tag{16}$$

или, обозначая $uG'(u) = \gamma g(u)$, где γ — постоянная,

$$g(u) = \int_u^\infty f_1\left(\frac{u}{v}\right) g(v)\, dv. \tag{17}$$

Положив $H(u) = \int_u^\infty g(v)\,dv$, получим

$$H'(u) + H(u) = -\int_u^\infty \left[1 - f_1\left(\frac{u}{v}\right)\right] dH(v). \qquad (18$$

Обозначая правую часть через $\varphi(u)$, решая уравнение $H'(u) + H(u) = \varphi(u)$ и учитывая, что $f_1(0) = 0$, $f_1(1) = 1$, найдем

$$H(u) = H(0)\,e^{-u} + \int_0^u e^{-(u-v)} \left[\int_v^\infty H(w)\,d_w\left(1 - f_1\left(\frac{v}{w}\right)\right)\right] dv, \qquad (19$$

или, сокращенно, $H = A(H)$, где $A(H)$ — правая часть (19). Очевидно, для любых $H_1(u)$ и $H_2(u)$ из $H_2 \geqslant H_1$ следует $A(H_2) \geqslant A(H_1)$.

Уравнение (19) решаем способом последовательных приближений. Положим $H_0(0) = 1$, $H_0(u) = 0$ при $u > 0$. Тогда $H_1(u) = A(H_0) = e^{-u} \geqslant H_0(u)$, $H_2(u) = A(H_1) \geqslant A(H_0) = H_1$, и т. д. Значит $H_k(u)$ не убывает при возрастании k. Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} H_k(u) = H(u)$ существует и что $H(+\infty) = 0$.

Пусть $0 < q < 1$,

$$H^*(u) = 1 \quad (0 \leqslant u \leqslant N), \qquad H^*(u) = e^{-q(u-N)} \quad (u \geqslant N). \qquad (20$$

Очевидно, $H^* \leqslant 1$, $A(H^*) \leqslant A(1) = 1$, т. е. $A(H^*) \leqslant H^*$ при $u \leqslant N$. Покажем, что $A(H^*) \leqslant H^*$ и при $u \geqslant N$. Возьмем такие h и α, что $0 < h < 1 - q$, $q < \alpha < 1$, $f_1(\alpha) > 1 - h$. Так как функция $H^*(u)$ невозрастающая, то

$$A(H^*) \leqslant e^{-u} + \int_0^u e^{-(u-v)}\left[hH^*(v) + (1-h)H^*\left(\frac{v}{\alpha}\right)\right] dv.$$

Оценивая правую часть с помощью (20), получим, что при $u \geqslant N$ $A(H^*) \leqslant \exp[-q(u-N)]$, если N достаточно велико. Итак, $A(H^*) \leqslant H^*$ при $0 \leqslant u < \infty$.

Так как $H_1(u) \leqslant H^*(u)$, то $H_k(u) \leqslant H^*(u)$ при всех k. Следовательно, существует $\lim\limits_{k\to\infty} H_k(u) = H(u) \leqslant H^*(u)$, и при $u \to \infty$ функция $H(u)$ стремится к 0 быстрее, чем e^{-qu} для любого $q < 1$, но не быстрее, чем e^{- Переходя к пределу в равенстве $H_k(u) = A[H_{k-1}(u)]$, получим $H(u) = A[H(u)]$. Существование решения уравнения (19) доказано. Из (19 следует, что это решение непрерывно.

Докажем теперь, что непрерывное решение уравнения (19), для которого $H(0)$ конечно, $H(\infty) = 0$, является единственным, с точностью до постоянного множителя. Пусть $H_1(u)$ и $H_2(u)$ — два таких решения. Положим $H(u) = C_1H_1(u) + C_2H_2(u)$, где постоянные C_1 и C_2 такие, что $|C_1| + |C_2| > 0$, $H(0) = 0$, $\max\limits_{0\leqslant u<\infty} H(u) = H(u_0) > 0$. Из (19) имеем

$$H(u_0) = \int_0^{u_0} \exp(v - u_0)\left\{\int_v^\infty H(w)\,d_w\left[1 - f_1\left(\frac{v}{w}\right)\right]\right\} dv.$$

нутренний интеграл не превосходит $H(u_0)$, и мы получаем $H(u_0) \leqslant H(u_0)$ $[1 - e^{-u_0})$. Следовательно, $H(u_0) = 0$, $H(u) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что из (19) следует существование и непрерывность $H'(u)$ при $u > 0$. Значит, уравнение (17) имеет единственное (с точностью до постоянного множителя) интегрируемое на интервале $(0, \infty)$ решение $g(u) = -H'(u)$; это решение непрерывно.

Докажем, что $g(u) > 0$ при $0 < u < \infty$. Предположим, что $g(u^*) = -H'(u^*) \leqslant 0$, $u^* > 0$. Так как $H(u) \to 0$ при $u \to \infty$, $H(u) > 0$, то найдется такое $u_1 \geqslant u^*$, что $H(u_1) > H(u)$ для всех $u > u_1$. Тогда найдется такое u_0, что $u^* \leqslant u_0 \leqslant u_1$, $g(u_0) = -H'(u_0) = 0$ и $H(u_0) > H(v)$ для всех $v > u_0$. Из (18) получим, интегрируя по частям и учитывая, что $f_1(1) = 1$,

$$H'(u_0) = -H(u_0) + \int_{u_0}^{\infty} H(v)\, dv \left[1 - f_1\left(\frac{u_0}{v}\right)\right] > 0.$$

Это противоречит равенству $g(u_0) = 0$. Итак, $g(u) > 0$ при $0 < u < \infty$.

Остается перейти к функции $G(u) = \gamma \int_0^u \frac{g(v)}{v}\, dv$. Полагая

$$\alpha_m = \int_0^{\infty} u^m\, dG(u) = \gamma \int_0^{\infty} u^{m-1} g(u)\, du, \quad \beta_m = \int_0^1 \lambda^m f_1(\lambda)\, d\lambda,$$

умножая (17) на γu^{m-1} и интегрируя от 0 до ∞, получим:

$$\alpha_m = \alpha_{m+1}\beta_{m-1}.$$

При $m = 0$ это дает

$$\int_0^{\infty} \frac{g(v)}{v}\, dv = \int_0^{\infty} g(v)\, dv \cdot \int_0^1 \frac{f_1(\lambda)}{\lambda}\, d\lambda = H(0) \int_0^1 \frac{f_1(\lambda)}{\lambda}\, d\lambda.$$

В силу условия 10° § 1 этот интеграл сходится. Подберем γ так, чтобы $G(\infty) = 1$. Из написанных равенств находим:

$$\alpha_0 = G(\infty) = 1, \quad \alpha_1 = \gamma = \frac{1}{\beta_{-1}}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\beta_{-1}\beta_0}, \ldots, \quad \alpha_m = \frac{1}{\beta_{-1}\beta_0 \ldots \beta_{m-2}};$$

$$\beta_m = \int_0^1 \lambda^m f_1(\lambda)\, d\lambda = n \int_0^1 u^{(m+1)n-1} f(u)\, du.$$

Зная моменты функции $G(u)$ и учитывая, что при $u \to \infty$ $\lim [G'(u) e^{qu}] = 0$ для любого $q < 1$, легко написать в явном виде коэффициенты разложения функции $G'(u) \exp(u/2)$ в ряд по ортогональным функциям Чебышева — Лагерра, и, значит, вычислить $G'(u)$ и $G(u)$ с произвольной точностью.

Пусть $L_k(u) = e^u \frac{d^k}{du^k}(u^k e^{-u})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, — многочлены Чебышева — Лагерра; $\psi_k(u) = \frac{1}{k!} L_k(u) e^{-\frac{u}{2}} = e^{-\frac{u}{2}} \sum_{m=0}^{k} a_{km} u^m$. Тогда $G'(u) = e^{-\frac{u}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \psi_k(u)$, где $b_k = \int_0^{\infty} G'(u) e^{\frac{u}{2}} \psi_k(u)\, du = \sum_{m=0}^{k} a_{km} \alpha_m$. Коэффициенты α_m были найдены раньше.

§ 5. Сходимость среднего значения функции $M(x, t)$ к предельному закон

Покажем, что при выполнении условий 1°—8°, 10° и 11° § 1 и $n >$ (обозначения те же, что в §§ 1, 2 и 4)

$$\lim_{t\to\infty} \max_{0\leqslant x<\infty} |MM(x, t) - M_0 G(tx^n)| = 0. \qquad (2$$

Согласно § 4

$$0 \leqslant uG'(u) = \gamma \int_u^\infty f_1\left(\frac{u}{v}\right) g(v)\,dv \leqslant \gamma \int_0^\infty g(v)\,dv = \gamma H(0) = \gamma,$$

и поэтому выражение

$$G[(t+1)x^n] - G(tx^n) = x^n G'((t+\theta)x^n) = \frac{1}{t+\theta} uG'(u),$$

где $0 < \theta < 1$, $u = (t+\theta)x^n$, равномерно стремится к нулю при $t \to \infty$. Следовательно, в (21) можно заменить $G(tx^n)$ на $G[(t+1)x^n]$, и соотноше ние (21) в том случае, когда при $t = 0$ имеется лишь одна частица, ра носительно следующему (в обозначениях формулы (15)):

$$\lim_{T\to\infty} \max_{-\infty<z<\infty} |Q(z, T) - Q(z)| = 0, \qquad (22$$

где $Q(z)$ — стационарное решение уравнения (15) (см. § 4).

Равенство (22) вытекает из эргодической теоремы для марковских слу чайных процессов (см. [3] стр. 488—491 или [4] теорема 5):

Теорема А. М. Яглома. *Если марковский процесс с непрерывной всюд положительной вероятностью перехода имеет стационарное распределени* $Q(z)$, *то оно единственно, и при любом начальном распределении* $Q(z, 0$ $\lim_{T\to\infty} Q(z, T) = Q(z)$.

В случае процесса (15)

а) стационарное распределение $Q(z)$ существует, $Q'(z) > 0$ пр $0 < z < \infty$;

б) сингулярная часть функции распределения (по z) вероятности переход $P(T_0, z_0; T_0 + T, z)$ сколь угодно мала при $T \to \infty$;

в) нижняя производная $\lim_{\Delta z\to 0} \frac{P(\ldots, z+\Delta z) - P(\ldots, z)}{\Delta z} = \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^- > h(T) >$ на произвольном отрезке $-N \leqslant z \leqslant N$, если $T > T_N$.

При этих условиях теорема Яглома остается справедливой. Доказатель ство ее проходит почти без изменений; при этом чтобы перейти от (115 к (116) (в обозначениях статьи [3]), нужно взять такое N, чтобы ком пакт Ω лежал на отрезке $[-N, N]$, и затем выбрать $T > T_N$. Аналогич ное замечание справедливо и для теоремы I ([3] стр. 486—488).

Утверждение а) доказано в § 4; докажем б) и в). Заменой переменног $z - T = y$ процесс (15) превращается в чисто разрывный процесс, для ко торого согласно формулам (123), (133) и (134) работы [2]

$$P(T_0, y_0; T_0 + T, y) = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \ldots, \qquad (23$$

де $\psi_k(y) = \int f \dots K(y-\eta)\, d\psi_{k-1}(\eta)$ (пропущены всюду положительные, епрерывно дифференцируемые функции). Из условия 11° § 1 вытекает, то при $k \geqslant 2$ на некотором интервале изменения y $(\partial\psi_k/\partial y)^- > h(k, T) > 0$, ричем с ростом k длина этого интервала растет не медленнее, чем по рифметической прогрессии, а правый конец его уходит влево (не быстрее, ем в арифметической прогрессии). Отсюда следует, что если y_1 достаточно ольшое по абсолютной величине отрицательное число, то $\partial P/\partial y > 0$ при $-\infty < y < y_1$. Переходя к переменному z, убеждаемся, что утверждение) справедливо.

Чтобы доказать б), заметим, что с ростом k сингулярные части функ- ций ψ_k делаются сколь угодно малы, а в формуле (23) при $T \to \infty$ все $\psi_k \to 0$ (равномерно по y, но неравномерно по k).

Итак, по теореме А. М. Яглома $Q(z, T) \to Q(z)$ при $T \to \infty$ для лю- бого z. Так как функции $Q(z, T)$ монотонны по z, а $Q(z)$ непрерывна, то сходимость равномерна, т. е. справедливо соотношение (22). Следовательно (21) справедливо в том случае, когда при $t = 0$ имеется одна части ца. Складывая подобные соотношения, написанные каждое для одной частицы, убедимся, что (21) справедливо и при условии 2° § 1. Заметим, что при доказательстве, вместо условия 6° § 1, было использовано более общее условие $F(\xi, \xi) = 1$.

Если $n = 0$ (этот случай рассматривался А. Н. Колмогоровым [1]), то асимптотическое поведение функции $\mathbf{M}M(x, t)$ при $t \to \infty$ будет иным. В наших обозначениях при $t \to \infty$ равномерно по x

$$\mathbf{M}M(x, t) - \frac{M_0 e^{(b-1)t}}{\sqrt{2\pi(\beta_0 + \beta t)}} \int_{-\infty}^{\ln x} e^{-\frac{(y-\alpha_0-\alpha t)^2}{2(\beta_0+\beta t)}}\, dy \to 0,$$

где $b = f(1)$,

$$\alpha = \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\, dx, \quad \beta = -2\int_0^1 \frac{f(x)\ln x}{x}\, dx,$$

$$\alpha_0 = \int_0^\infty \ln x\, dM(x, 0), \quad \beta_0 = \int_0^\infty (\ln x - \alpha_0)^2\, dM(x, 0);$$

предполагается, что все эти величины конечны и что выполнены условия 1°—5°, 7°, 8° § 1.

§ 6. Сходимость по вероятности функции $M(x, t)$ к предельному закону

В § 6 предполагаем, что выполнены условия 1°—11° § 1 и $n \geqslant 0$.

а) Пусть при $t = 0$ имеется одна частица, и ее масса равна 1. Примем обозначения § 2 и оценим $D(x, t)$ из уравнения (9). В случае $n > 0$ разо- бьем двойной интеграл в (9) на два: I_1 — интеграл по области $t^{-\frac{1}{2n}} \leqslant \xi \leqslant 1$, $t^{-\frac{1}{2n}} \leqslant \eta \leqslant 1$ и I_2 — интеграл по остальной части области. Из (21) вытекает, что при $t\xi^n \to \infty$, $0 < \xi < 1$ имеем $\mathbf{M}m\left(\frac{x}{\xi}, t\xi^n\right) - G(tx^n) \to 0$ равномерно по x. Следовательно, $I_1 \to 0$ при $t \to \infty$. Так как $0 \leqslant \mathbf{M}r \leqslant 1$, то I_2 тоже стремится к нулю. В случае $n = 0$ двойной интеграл в (9)

тоже стремится к нулю при $t \to \infty$; это следует из формулы для $\mathbf{M}M(x, t$ приведенной в конце § 5. Теперь из (9) получаем при $n \geqslant 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} D(x, t) < -D(x, t) + \int_0^1 D\left(\frac{x}{\xi}, t\xi^n\right) df_2(\xi) + \varphi(t), \tag{24}$$

где $|\varphi(t)| < C$, $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $f_2(x) = \int_0^x \xi \, df(\xi)$. Очевидно $0 \leqslant f_2(x) \leqslant x$, $f_2(1) < 1$.

Пусть $f_2(1) = q$. Покажем, что (24) следует $\lim_{t\to\infty} D(x, t) = 0$.

Если $\alpha > 0$ таково, что $\alpha n < 1$, $\alpha + \frac{q^{1-\alpha n}}{1-\alpha n} < 1$, и $h(t) = 2\varepsilon + ct^{-\alpha}$ $\varepsilon > 0$, $c > 0$, то легко проверить, что при $t \geqslant 1$

$$\frac{dh}{dt} > -h(t) + \int_0^1 h(t\xi^n) df_2(\xi) + 2\varepsilon(1-q). \tag{25}$$

Пусть $t_1 \geqslant 1$ таково, что при $t \geqslant t_1$ $\varphi(t) < \varepsilon(1-q)$. Возьмем $c = t_1^{\alpha}$; тогда $D(x, t) < h(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1$, так как всегда $0 \leqslant D(x, t) \leqslant 1$ (см. § 2). Покажем, что $D(x, t) < h(t)$ при любых x и t. При $x > M_0$, $0 \leqslant t < \infty$ имеем $D(x, t) = 0$ (принять во внимание смысл функции $D(x, t)$, см. § 2). Пусть x_1 — наименьшее из тех чисел, для которых в области $x > x_1$ $0 \leqslant t < \infty$ имеем $D(x, t) - h(t) < 0$. Предположим, что $x_1 > 0$. Пусть $x_2 < x_1$ такое, что $f_2(1) - f_2\left(\frac{x_2}{x_1}\right) < \varepsilon(1-q)$; t_2 — наименьшее значение t при котором $D(x_2, t) - h(t) \geqslant 0$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} D(x_2, t_2) - \frac{d}{dt} h(t_2) \geqslant 0. \tag{26}$$

Вычитывая (25) из (24), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} D(x_2, t_2) - \frac{d}{dt} h(t_2) < -D(x_2, t_2) + h(t_2) + \\ + \int_0^1 \left(D\left(\frac{x_2}{\xi}, t_2\xi^n\right) - h(t_2\xi^n)\right) df_2(\xi) + \varphi(t_2) - 2\varepsilon(1-q).$$

Интеграл разбиваем на два интеграла: от 0 до x_2/x_1 и от x_2/x_1 до 1. Первый из них $\leqslant 0$ в силу выбора x_1, а второй $< \varepsilon(1-q)$ в силу выбора x_2, а также в силу того, что $D(x, t) \leqslant 1$, $h(t) > 0$. Замечая еще, что $D(x_2, t_2) = h(t_2)$ и $\varphi(t_2) < \varepsilon(1-q)$, получим, что вся правая часть < 0, что противоречит (26).

Следовательно, $\overline{\lim_{t\to\infty}} \max_{0\leqslant x<\infty} D(x, t) \leqslant \lim_{t\to\infty} h(t) = 2\varepsilon$. Так как ε произвольно, то $D(x, t) \to 0$ равномерно по x.

б) Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ и $t \to \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0\leqslant x<\infty} |m(x, t) - \mathbf{M}m(x, t)| \geqslant \varepsilon\right\} \to 0. \tag{27}$$

В самом деле, согласно неравенству Чебышева ([5], стр. 187).

$$\mathbf{P}\left\{|m(x,t)-\mathbf{M}m(x,t)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leqslant\frac{4}{\varepsilon^2}D(x,t).$$

Правая часть равномерно по x стремится к нулю. Пусть $x_k=x_k(t)$ такие, что $\mathbf{M}m(x_k(t),t)\equiv k\cdot\frac{\varepsilon}{2}$ для $k=0,1,2,\ldots,N$; $N=[2/\varepsilon]$. Тогда для любого $\delta>0$ при $t>t(\delta)$ с вероятностью, большей $1-\delta$, имеем

$$\max_{k=0,1,\ldots,N}|m(x_k,t)-\mathbf{M}m(x_k,t)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Но если выполнено это неравенство, то

$$\max_{0\leqslant x<\infty}|m(x,t)-\mathbf{M}m(x,t)|<\varepsilon$$

(это следует из монотонности по x функций m и $\mathbf{M}m$ и выбора точек x_k). Отсюда вытекает соотношение (27).

в) Пусть при $t=0$ имеется одна частица, ее масса равна ξ. Сумму масс частиц массы $<x$, образующихся из нее за время t, обозначим $m_\xi(x,t)$, математическое ожидание этой суммы $\mathbf{M}m_\xi(x,t)$. Если увеличить единицу массы в ξ раз и одновременно уменьшить единицу времени в ξ^n раз, то условия 1°—11° § 1 не нарушатся, но масса первоначальной частицы будет равна 1, и, следовательно, для нее будет справедливо (27). Возвращаясь к старым единицам массы и времени, получим при $\varepsilon_1=\varepsilon\xi>0$

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\max_{0\leqslant x<\infty}|m_\xi(x,t)-\mathbf{M}m_\xi(x,t)|\geqslant\varepsilon_1\right\}=0.$$

Отсюда и из (21) следует, что для любого $\varepsilon_2>0$

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\max_{0\leqslant x<\infty}|m_\xi(x,t)-\xi G(tx^n)|\geqslant\varepsilon_2\right\}=0. \tag{28}$$

г) Пусть при $t=0$ имеется конечное или бесконечное число частиц с массами $\xi_1,\xi_2,\ldots$; $\Sigma\xi_i=M_0<\infty$. Возьмем такое N, чтобы $\xi_{N+1}+\xi_{N+2}+\ldots<\varepsilon/4$, и такое $t(\delta)$, чтобы при $t>t(\delta)$ для каждой из частиц $\xi_1,\ldots,\xi_N$ вероятность в левой части (28) не превосходила δ/N.

Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0\leqslant x<\infty}\left|\sum_{i=1}^{N}m_{\xi_i}(x,t)-\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i\right)G(tx^n)\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right\}<\delta. \tag{29}$$

Если заменить N на ∞, то уменьшаемое и вычитаемое изменяется меньше, чем на $\varepsilon/4$. Следовательно, при $t>t(\delta)$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{0\leqslant x<\infty}|M(x,t)-M_0G(tx^n)|\geqslant\varepsilon\right\}<\delta.$$

§ 7. Случай изменения массы при каждом дроблении

В § 7 условия 6° и 10° § 1 заменяются следующими:

6°а. $\int_0^1\frac{1}{\lambda}\,df(\lambda)>1$, т. е. математическое ожидание числа частиц, получающихся из одной частицы при одном дроблении, больше единицы; оно может также быть бесконечным;

10°а. $\int_0^1 \lambda^m \ln\lambda\, df(\lambda)$ сходится, где m такое, что $\int_0^1 \lambda^m\, df(\lambda) = 1$. Такое m существует, потому что при $m = -1$ последний интеграл > 1 в силу 6°а, а при $m \to +\infty$ он стремится к 0.

Кроме того, вместо ограниченности суммы масс всех частиц при $t =$ потребуем, что $\int_0^\infty x^m\, dM(x, 0) = M_0 < \infty$.

Вместо уравнения (3) мы теперь получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{M}M(x, t) = (f(1) - 1)\int_0^x \xi^n\, d\mathbf{M}M(\xi, t) + \int_x^\infty \xi^n f\left(\frac{x}{\xi}\right) d\mathbf{M}M(\xi, t).$$

Это уравнение после замены переменных

$$\mathbf{M}M_0(x, t) = \int_0^x \xi^m\, d\mathbf{M}M(\xi, t), \quad f_0(\lambda) = \int_0^\lambda \alpha^m\, df(\alpha) \tag{30}$$

превращается в уравнение, отличающееся от уравнения (3) лишь обозначениями. Легко проверить, что функция $f_0(\lambda)$ удовлетворяет условию 10 § 1 и $f_0(1) = 1$.

Итак, случай $f(1) \neq 1$ сводится к уже разобранному случаю $f(1) = 1$.

§ 8. Решение в явном виде в случае $f(\lambda) = b\lambda^k$

Пусть $f(\lambda) = b\lambda^k$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, где $k > 0$, $b > 0$, $b > 1 - \frac{1}{k}$. Тогда выполнены условия 6°а и 10°а § 7. Поэтому, согласно § 7, задача сводится к случаю $b = 1$.

Можно показать, что в случае $f(\lambda) = \lambda^k$, $k > 0$, $n > 0$ имеем

$$G(u) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}\int_0^u v^{\frac{k}{n}-1} e^{-v}\, dv, \tag{31}$$

$$\mathbf{M}m(x, t) = te^{-t}\int_0^{x^k} F\left(1 + \frac{k}{n},\ 2,\ \left(1 - v^{\frac{n}{k}}\right)t\right) dv \quad \text{при } x \leqslant 1, \tag{32}$$

где $F(a, b, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция (см. [6], стр. 562—565). В случае $n = 0$ подынтегральную функцию в (32) следует заменить на функцию $j_1(-t\ln v)$, где

$$j_1(z) = 1 + \frac{z}{1!2!} + \frac{z^2}{2!3!} + \frac{z^3}{3!4!} + \ldots = \frac{1}{\sqrt{z}} I_1(2\sqrt{z}) = \frac{1}{\sqrt{-z}} J_1(2\sqrt{-z}),$$

J_1 — функция Бесселя.

Формулы для $G(u)$ и $\mathbf{M}m(x, t)$ проверяются непосредственно: $G(u)$ удовлетворяет уравнению (16), а $\mathbf{M}m(x, t)$ — дифференциальному уравнению, которое получается, если обе части уравнения (3) разделить на x^k и продифференцировать по x, с краевыми условиями:

$$\mathbf{M}m(x, 0) = 0, \quad (0 \leqslant x \leqslant 1); \qquad \mathbf{M}m(1, t) = 1 - e^{-t} \quad (t \geqslant 0).$$

Если положить $\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{M}m(x, t) = q(x, t)$ ($q(x, t)\,dx$ — математическое ожидание числа частиц массы от x до $x + dx$, получившихся из одной

астицы массы 1 за время t), то

$$q(x, t) = kte^{-t}x^{k-2}\Psi(x, t), \quad 0 < x < 1, \tag{33}$$

де при $n \neq 0$, $\Psi = F\left(1 + \frac{k}{n}, 2, (1-x^n)t\right)$, а при $n = 0$, $\Psi = j_1(-kt\ln x)$. Формула (33) проверяется так же, как (32). Если k/n — целое, то $q(x, t)$ ыражается через элементарные функции в конечном виде (см. [6], тр. 563). Так как при $z \to +\infty$

$$F(a, b, z) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} z^{a-b}e^z, \quad F(a, b, -z) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} z^{-a}, \quad I_1(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}$$

см. [7] стр. 373, [8] стр. 653), то мы получим из (33)

$$\left.\begin{aligned} q(x, t) &\sim \frac{kt^{\frac{k}{n}}}{\Gamma\left(1+\frac{k}{n}\right)} x^{k-2}e^{-tx^n}(1-x^n)^{\frac{k}{n}-1} \quad \text{при} \quad n > 0, \\ q(x, t) &\sim \frac{kt^{-\frac{k}{n}}e^{-t}}{\Gamma\left(1-\frac{k}{n}\right)} x^{-n-2}(1-x^{-n})^{-\frac{k}{n}-1} \quad \text{при} \quad n < 0, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

в обоих случаях при малых x последний сомножитель можно отбросить, так как он мало отличается от 1;

$$x^2q(x, t) \sim \frac{(kt)^{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}\,(-\ln x)^{3/4}} e^{-(\sqrt{-k\ln x} - \sqrt{t})^2} \quad \text{при } n = 0.$$

Математическое ожидание числа частиц, образующихся из одной частицы массы 1 за время t, равно

$$\mathbf{M}N(t) = \int_0^1 q(x, t)\,dx + e^{-t}. \tag{35}$$

При $n \neq 0$ и $f(\lambda) = \lambda^k$, $k > 1$, имеем $\mathbf{M}N(t) = F\left(-\frac{1}{n}, \frac{k-1}{n}, -t\right)$ (в силу (32)), т. е. $\mathbf{M}N(t) \sim \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)} t^{\frac{1}{n}}$, а при $n = 0$ и любом $f(\lambda)$ имеем $\mathbf{M}N(t) = e^{(a-1)t}$, где $a = \int_0^1 \frac{df(\lambda)}{\lambda}$. Если $k \leqslant 1$ или если $a = \infty$, то легко показать, что $\mathbf{M}N(t) = \infty$ при всех $t > 0$.

§ 9. Случай $n < 0$ и вопрос о «распылении» массы

а) Пусть $p(x) = x^n$, $n < 0$, $f(\lambda) = \lambda^k$. Из (34) и (35) видно, что, начиная с некоторого t, $\mathbf{M}N(t)$ убывает. Поэтому при $n < 0$ (в отличие от результатов § 6) распределение частиц не может приближаться ни к какому предельному закону. Лишь в том случае, если при $t = 0$ число частиц велико и их массы приблизительно одинаковы, то на протяжении конечного отрезка времени фактическое распределение частиц будет близко к своему математическому ожиданию — распределению вида (34) (в силу закона больших чисел), но с течением времени эта близость нарушится.

Далее, в силу того, что $q(x, t)$ убывает при $t > t_1$, сумма масс все частиц ненулевой массы тоже убывает, так как ее математическое ожидание равно

$$\int_0^1 xq(x, t)\,dx + e^{-t}. \tag{36}$$

Т. е. наблюдается потеря массы, точнее, «распыление» частиц первоначальной массы в частицы нулевой массы (см. конец § 1).

Если при $t = 0$ имелась одна частица, и ее масса равна 1, то математическое ожидание величины «распылившейся» массы равно $\mathbf{M}\,m(+0, t)$, так как в обозначениях § 2 сумма масс всех частиц ненулевой массы в момент t равна $r(+0, t) = 1 - m(+0, t)$. Из (2) следует

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{M}\,m(+0, t) = \lim_{x \to 0} \int_x^\infty p(\xi) f\left(\frac{x}{\xi}\right) d\,\mathbf{M}\,m(\xi, t). \tag{37}$$

Если $p(\xi) = \xi^n$, $f(\lambda) = \lambda^k$, то из (34) и (37) получим

$$\mathbf{M}\,m(+0, t) = \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{k}{n}\right)} \int_0^t \tau^{-\frac{k}{n}} e^{-\tau} d\tau; \quad \lim_{t \to \infty} \mathbf{M}\,m(+0, t) = 1.$$

б) Пусть выполнены условия 1°—6°, 8° и 10° § 1. Если функция $p(x)$ ограничена в окрестности точки $x = 0$, то распыления массы нет. Если же $p(x)$ монотонно (в широком смысле) стремится к $+\infty$ при $x \to 0$, то расходимость при $x = 0$ интеграла

$$\int_0^b \frac{dx}{xp(x)} \tag{38}$$

является необходимым и достаточным условием для того, чтобы масса не распылялась.

Для доказательства этого утверждения понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Рассмотрим два уравнения*

$$\frac{\partial P_i(t, y)}{\partial t} = \int_y^\infty p_i(t, \eta) F_i(t, \eta, y)\, d_\eta P_i(t, \eta), \quad i = 1; 2. \tag{39}$$

Пусть произведение $p_2(t, \eta) F_2(t, \eta, y)$ неотрицательно и не возрастает с ростом η при любых постоянных t и y; кроме того,

$$\sup_{y \leqslant \eta \leqslant y_0} p_2(t, \eta) F_2(t, \eta, \eta) \leqslant a(y) < \infty.$$

Пусть, далее, P_1 и P_2 — такие решения уравнения (39), *что,*

$$P_1(t, y) = P_2(t, y) = 1 \text{ при } y > y_0,\ t \geqslant t_0, \tag{40}$$

функция $P_1(t, y)$ неубывающая по y. Если

$$p_2(t, \eta) F_2(t, \eta, y) \geqslant p_1(t, \eta) F_1(t, \eta, y) \text{ при } \eta \geqslant y;\ P_2(t_0, y) \geqslant P_1(t_0, y) \quad (41)$$

или выполняются противоположные неравенства), то при всех $t \geqslant t_0$ и всех y имеет место неравенство $P_2(t, y) \geqslant P_1(t, y)$ (соответственно $P_2(t, y) \leqslant P_1(t, y)$).

Доказательство. Предположим, что лемма неверна, т. е. что при выполнении условий (41) имеем $P_2(t_1, y_1) - P_1(t_1, y_1) = -\delta < 0$, где $t_1 > t_0$. Пусть $u(t, y) = (P_2(t, y) - P_1(t, y) + \delta) e^{(t-t_0)A}$, где $A = a(y_1)$. Тогда $u(t_0, y) \geqslant \delta > 0$, $u(t_1, y_1) = 0$; в силу (39) и (40)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + e^{(t-t_0)A} \left(\int_y^{y_0+1} p_2 F_2 d_\eta P_2 - \int_y^{y_0+1} p_1 F_1 d_\eta P_1 \right).$$

Заменяя $p_1 F_1$ на большую величину $p_2 F_2$, объединяя оба интеграла, заменяя $e^{(t-t_0)A} d_\eta (P_2 - P_1)$ на $d_\eta u$, интегрируя по частям и учитывая (40), получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant (A - p_2(t, y) F_2(t, y, y)) u(t, y) - \int_y^{y_0+1} u(t, \eta) d_\eta (p_2 F_2).$$

Так как $u = \delta e^{(t-t_0)\lambda}$ при $t \geqslant t_0$, $y > y_0$, а при $y_1 \leqslant y \leqslant y_0$ $p_2(t, y) F_2(t, y, y) \leqslant a(y_1) = A$, и $p_2 F_2$ не возрастает с ростом η, то при условии, что $u(t, y) \geqslant 0$ при всех $y \geqslant y_1$, имеем $du/dt \geqslant 0$ при тех же y. Но $u(t_0, y) \geqslant \delta > 0$. Значит, при всех $t \geqslant t_0$ и $y \geqslant y_1$ имеем $u(t, y) \geqslant \delta$. Это противоречит ранее полученному равенству $u(t_1, y_1) = 0$. Следовательно, наше предположение неверно и лемма доказана (при условии (41)). Случай, когда вместо (41) выполнены противоположные неравенства, рассматривается аналогично.

Лемма 2 (условие регулярности марковского процесса). *В области $-\infty < y < c$ рассмотрим марковский процесс, описанный в начале § 3. Пусть функция $p(\eta)$ невозрастающая, и пусть существуют такие неубывающие функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$, что при любых η и z*

$$F_1(z) \leqslant F(\eta, \eta + z) \leqslant F_2(z), \quad (42)$$

$$F_i(-\infty) = 0,\ F_i(z) = 1 \text{ при } z \geqslant 0,\ i = 1; 2, \quad (43)$$

$$-\infty < \int_{-\infty}^{0} z\, dF_i(z) < 0,\ i = 1; 2 \quad (44)$$

(следовательно, величина скачка всегда отрицательная и имеет конечное математическое ожидание).

Тогда для регулярности процесса (определение регулярности см. § 3) *необходимо и достаточно, чтобы при всяком B*

$$\int_{-\infty}^{B} \frac{d\eta}{p(\eta)} = +\infty. \quad (45)$$

Докажем достаточность. Сравним рассматриваемый процесс с другим марковским процессом, в котором функция $p(\eta)$ та же самая, а $F(\eta, y)$ заменена на функцию $F_2^*(y - \eta)$, где $F_2^*(z) \equiv F_2([z] + 1)$, $[z]$ — целая часть

числа z. Тогда

$$F_2(z) \leqslant F_2^*(z) \leqslant F_2(z+1). \tag{46}$$

Зафиксируем произвольное y_0 и обозначим $P(t, y)$ вероятность того, что $\omega(t) < y$ при условии $\omega(t_0) = y_0$; для второго процесса, т. е. процесса с функцией F_2^*, обозначим через $P_2^*(t, y)$ аналогичную величину, но при условии $\omega(t_0) = [y_0]$. Тогда $P(t, y)$ удовлетворяет уравнению (39), в котором p_i и F_i заменены на p и F, а $P_2^*(t, y)$ — такому же уравнению с функцией $F_2^*(y - \eta)$ вместо $F(\eta, y)$. Из (42) и (46) следует, что $F_2^*(y - \eta) \geqslant F(\eta, y)$. Так как $F_2^*(y - \eta)$ не возрастает с ростом η и $P_2^*(t_0, y) \geqslant P(t_0, y)$, то в силу леммы 1

$$P_2^*(t, y) \geqslant P(t, y) \text{ при } t \geqslant t_0. \tag{47}$$

Покажем, что второй процесс регулярен. Этот процесс марковский, однородный по времени, со счетным числом возможных состояний, так как в этом процессе $\omega(t)$ принимает лишь целые значения. В силу теоремы 2 статьи [9] для его регулярности необходимо и достаточно, чтобы при любом начальном состоянии на почти всех траекториях $\{i_0, i_1, i_2, \ldots\}$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p(i_n)} \tag{48}$$

расходился. В нашем случае траектория — последовательность $\{i_0, i_1, i_2, \ldots\}$, где $i_0 = \omega(t_0)$, а i_n — значение, принимаемое функцией $\omega(t)$ после n-го скачка. Разность $i_n - i_0$ есть сумма одинаково распределенных, независимых случайных величин $i_1 - i_0, \ldots, i_n - i_{n-1}$ — величин скачков. Из (44) и (46) следует, что математическое ожидание величины скачка конечно и отрицательно. Обозначим его $-d$. Согласно усиленному закону больших чисел А. Н. Колмогорова ([5], стр. 205), с вероятностью 1, имеем $(i_n - i_0)/n \to -d$ при $n \to \infty$. Т. е. для почти всех траекторий $\{i_0, i_1, \ldots\}$, начиная с некоторого n, имеем $i_n \geqslant i_0 - 2nd$, $p(i_n) \leqslant p(i_0 - 2nd)$, и ряд (48) расходится (так как ряд из чисел, обратных $p(i_0 - 2nd)$, расходится вместе с интегралом (45)). Это значит, что марковский процесс регулярен, следовательно, $P^*(t, -\infty) = 0$ при любом t. Теперь из (47) следует, что $P(t, -\infty) = 0$. Значит, первоначальный процесс тоже регулярен.

Докажем необходимость. Сравним рассматриваемый процесс с другим марковским процессом, в котором функции $p(\eta)$ и $F(\eta, y)$ заменены на функции $p_0(\eta)$ и $F_0(y - \eta)$, которые сейчас будут построены. В силу (43) и (44) существуют такие $b > 0$ и $c > 0$, что $F_1(-b) = c$. Положим $p_0(\eta) = cp(\eta)$, $F_0(z) = 0$ при $z \leqslant -b$, $F_0(z) = 1$ при $z > -b$. В силу (42) и (43) имеем $p_0(\eta) F_0(y - \eta) \leqslant p(\eta) F(\eta, y)$ при $\eta \geqslant y$. Начальные условия для первоначального процесса $\omega(t_0) = y_0$, а для другого — $\omega(t_0) = c\left[\frac{y_0}{c}\right] + c$. Тогда вероятности $P(t, y)$ и $P_0(t, y)$ для этих процессов удовлетворяют уравнениям вида (39). Условия леммы 1 выполнены, следовательно,

$$P_0(t, y) \leqslant P(t, y) \text{ при } t \geqslant t_0. \tag{49}$$

Процесс, характеризуемый функциями p_0 и F_0, имеет счетное число возможных состояний (вида $y = Nc$, N — целое), при этом из каждого состоя-

ия $y = Nc$ возможен непосредственный переход только в состояние $= (N-1)c$ с вероятностью $p_0(Nc)\Delta t + o(\Delta t)$ за время Δt. По теореме Феллера ([10], стр. 382) для регулярности процесса необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_0(N_0 c - kc)} = \infty. \tag{50}$$

Если интеграл (45) сходится, то ряд (50) также сходится и построенный процесс нерегулярен. Поэтому $P_0(t, -\infty) > 0$ при некотором $t > t_0$. Теперь из (49) следует, что $P(t, -\infty) > 0$, и первоначальный процесс тоже нерегулярен.

Перейдем к доказательству утверждения, сформулированного в начале пункта б). Очевидно, можно ограничиться случаем, когда при $t = 0$ имеется одна частица. Тогда функция $\mathbf{M}M(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2) и начальным условиям (14). Сделав замену переменных

$$x = e^y, \quad \xi = e^\eta, \quad F(\xi, x) \equiv f\left(\frac{x}{\xi}\right) = f(e^{y-\eta}) = F_1(y-\eta),$$

$$p(\xi) = p(e^\eta) = p_1(\eta), \quad \mathbf{M}M(x, t) = M_0 P(t, y),$$

получим уравнение

$$\frac{\partial P(t, y)}{\partial t} = \int_y^\infty p_1(\eta) F_1(y-\eta)\, d_\eta P(t, \eta); \quad P(t_0, y) = \begin{cases} 0 & (y \leqslant \ln M_0), \\ 1 & (y > \ln M_0), \end{cases}$$

которое можно рассматривать как уравнение некоторого одномерного марковского процесса. Если функция $p_1(\eta)$ ограничена, то процесс регулярен; по лемме 2, условия которой выполнены (неравенство (44) вытекает из условия 10° § 1, монотонности функций $f(x)$ и равенства $f(0) = 0$), то же имеет место, если $p_1(\eta)$ не возрастает и

$$\int_{-\infty}^{B} \frac{d\eta}{p_1(\eta)} \tag{51}$$

расходится, т. е. если расходится интеграл (38). Если же $p_1(\eta)$ не возрастает и интеграл (51), а значит, и (38), сходится, то процесс нерегулярен. В случае регулярности процесса $\lim\limits_{y \to -\infty} P(t, y) = 0$ при всех $t > 0$, следовательно, $\mathbf{M}M(+0, t) = 0$, и с вероятностью 1 распыления массы нет в случае нерегулярности $\lim\limits_{y \to -\infty} P(t, y) > 0$ при некоторых $t > 0$, следовательно, $\mathbf{M}M(+0, t) > 0$, т. е. с положительной вероятностью есть распыление массы. Легко показать, что в последнем случае $\mathbf{M}M(+0, t) \to M_0$ при $t \to \infty$, т. е. постепенно «распыляется» вся первоначальная масса (с вероятностью 1).

Поступила в редакцию
10.12.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении, ДАН СССР **31**, 2 (1941), 99—101.

[2] В. Феллер, К теории стохастических процессов, Успехи матем. наук, 5 (1938), 57—96.

[3] А. М. Яглом, О статистической обратимости брауновского движения, Матем. сб. **24**, 3 (1949), 457—492.
[4] J. L. Doob, Asymptotic properties of Markoff transition probabilities, Trans. Amer Math. Soc., **63**, 3, (1948), 393—421.
[5] Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, Гостехиздат, М.— Л., 1954.
[6] Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ИИЛ, М., 1950.
[7] Е. Янко и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, М.— Л., 1949.
[8] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Гостехиздат, М.— Л., 1951.
[9] Р. Л. Добрушин, Об условиях регулярности однородных по времени марковских процессов со счетным числом возможных состояний, Успехи матем. наук, **7**, 6 (1952), 185—191.
[10] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИИЛ, М., 1952.
[11] М. С. Бартлетт, Введение в теорию случайных процессов, ИИЛ, М., 1958.
[12] W. Feller, On the integro-differential equations of purely discontinuous Markoff processes, Trans. Amer. Math. Soc., **48**, 3 (1940), 488—515.

ÜBER DAS VERTEILUNGSGESETZ DER GRÖSSEN DER TEILCHEN BEI ZERSTÜCKELUNG

A. F. FILIPPOV (MOSKAU)

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit wird das asympotische Verhalten (für $t \to \infty$) des Verteilungsgesetzes der Grössen der Teilchen bei Zerstückelung erforscht. Es ist vorausgesetzt, dass die Teilchen aufeinander nicht einwirken und dass die Wahrscheinlichkeit der Zerstückelung jedes Teilchen in der Zeitlänge $(t, t + dt)$ der n-ten Potenz seiner Masse proportional ist.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ом VI И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1961

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УТОЧНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА КРАМЕРА — РАО

Л. Н. БОЛЬШЕВ

Заметка посвящена уточнению неравенства Крамера — Рао для тех случаев, когда так азываемые эффективные (или совместно эффективные) оценки не существуют. Для тношения дисперсии наилучшей оценки к дисперсии какой-либо несмещенной оценки олученные результаты позволяют указать более точную границу снизу, чем эффектив ость.

Первый и второй разделы посвящены доказательству основной теоремы и различным ледствиям. В третьем разделе даны примеры. Изложение ведется в терминах алгебры рямоугольных матриц, которая особенно удобна для многомерного статистического нализа (см., например, [5]). Векторы трактуются как матрицы с единственным столб ом («вектор-столбец»); символом x^* обозначается транспонированная матрица (элементы атриц x и x^* связаны соотношением $x_{ij} = x^*_{ji}$); если Ξ — матрица, элементы кото ой — случайные величины, то символом $\mathbf{M}\Xi$ обозначается матрица, элементы которой равны математическим ожиданиям элементов матрицы Ξ. В дальнейшем используются ледующие свойства прямоугольных матриц:

1. $(AB)^* = B^*A^*$, $(ABx)^* = x^*(AB)^* = x^*B^*A^*$ и т. д.

2. Если x и y — n-мерные векторы, то $x^*y = y^*x$, причем $(x^*y)^2 = x^*yy^*x = y^*xx^*y$

3. Если Ξ — случайная матрица, A и B — неслучайные матрицы, то $\mathbf{M}(A\Xi B) = A(\mathbf{M}\Xi)B$.

Результаты, изложенные в данной заметке, представляют собой обобщение резуль татов Л. Бхаттачария [1] на многомерный случай. Мысль о возможности подобных обобщений возникла при обсуждении этой темы с Ю. В. Линником, которому автор благодарен за проявленный к этой работе интерес и за помощь.

Основная теорема

Пусть $\xi^* = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — n-мерная случайная величина, подчиняющаяся распределению с плотностью вероятности $p(x \mid a)$, где

$$x^* = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{R}_n, \quad a^* = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{R}_m,$$

причем

$$\int_{\mathfrak{R}_n} p(x \mid a)\, dV \equiv 1 \quad (a \in \mathfrak{A},\ dV = dx_1 \ldots dx_n) \tag{1}$$

(a — неизвестный параметр распределения, $\mathfrak{A}$ — допустимое множество значений этого параметра). Пусть, далее,

$$f^*(a) = (f_1(a), \ldots, f_k(a)) \in \mathfrak{R}_k$$

(f — вектор, компонентами которого являются заданные функции от a). Предположим

то существует такая вектор-функция от ξ

$$\varphi^*(\xi) = (\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_k(\xi)),$$

которая не зависит от a и представляет собой несмещенную оценку для f^*, т. е.

$$\mathbf{M}\varphi \equiv \int_{\mathfrak{R}_n} \varphi(x)\, p(x \mid a)\, dV \equiv f(a) \quad (a \in \mathfrak{A}). \tag{2}$$

Кроме того, предположим, что для φ существует корреляционная матрица (матрица вторых центральных моментов):

$$B = \mathbf{M}(\varphi - f)(\varphi - f)^*. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть плотность вероятности $p(x \mid a)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Множество $\{x\colon p(x|a) = 0\}$ не зависит от a.*

2. *Существуют частные производные от плотности $p(x \mid a)$ по параметрам $a_1, \ldots, a_m$ до порядка s включительно, причем*

$$\int_{\mathfrak{R}_n} \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_m}}{\partial a_1^{i_1} \ldots \partial a_m^{i_m}}\, p(x|a)\, dV \equiv 0 \qquad (a \in \mathfrak{A},\ 1 \leqslant i_1 + \ldots + i_m \leqslant s) \tag{4}$$

допустимо дифференцирование под знаком интеграла (1)); кроме того, существует симметрическая невырожденная (положительно определенная) матрица

$$I = \mathbf{M}\lambda\lambda^*,$$

где $\lambda^* = (\lambda_1(a), \ldots, \lambda_r(a))$ — r-мерная случайная величина, компонентами которой являются всевозможные отношения вида

$$\frac{1}{p(\xi \mid a)} \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_m}}{\partial a_1^{i_1} \ldots \partial a_m^{i_m}} p(\xi \mid a) \quad (a \in \mathfrak{A},\ 1 \leqslant i_1 + \ldots + i_m \leqslant s), \tag{5}$$

занумерованные в произвольном порядке (r — общее число таких отношений).

3. *Существуют частные производные от функций $f_1(a), \ldots, f_k(a)$ по параметрам $a_1, \ldots, a_m$ до порядка s включительно, причем имеет место тождество*

$$\int_{\mathfrak{R}_n} \varphi(x) \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_m}}{\partial a_1^{i_1} \ldots \partial a_m^{i_m}}\, p(x \mid a)\, dV \equiv \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_m}}{\partial a_1^{i_1} \ldots \partial a_m^{i_m}} f(a) \qquad (a \in \mathfrak{A}) \tag{6}$$

(допустимо дифференцирование под знаком интеграла (2)).

В таком случае для любого $z^* = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathfrak{R}_k$ справедливо неравенство

$$z^* B z \geqslant z^* J^* I^{-1} J z, \tag{7}$$

где $J = \| f_{u,v} \|$ $(u = 1, \ldots, r;\ v = 1, \ldots, k)$ — матрица, строки которой представляют собой частные производные

$$\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_m}}{\partial a_1^{i_1} \ldots \partial a_m^{i_m}} f(a) \qquad (a \in \mathfrak{A},\ 1 \leqslant i_1 + \ldots + i_m \leqslant s),$$

занумерованные в том же порядке, что и отношения (5).

Неравенство (7) превращается в равенство тогда и только тогда, когда с вероятностью единица, имеет место равенство

$$J^* I^{-1} \lambda = \varphi - f. \tag{8}$$

Заметим, что если ξ заменить на x, то (8) превратится в систему k линейных алгебраических уравнений относительно частных производных от плотности $p(x \mid a)$.

еорема останется справедливой, если условие 1 заменить более слабым условием

$$\sup_{a \in \mathfrak{A}} \mathbf{P}\{\xi \in \bigcup_{a \in \mathfrak{A}} [x:\ p(x \mid a) = 0]\} = 0.$$

налогичным образом можно ослабить и условие 2.

Доказательство*. Рассмотрим одномерную случайную величину

$$\Delta = [(\varphi - f)^* - \lambda^* I^{-1} J]\, z. \tag{9}$$

силу (2), (4) и (5) $\mathbf{M}\Delta = 0$, поэтому $\mathbf{D}\Delta = \mathbf{M}\Delta^2$. Но

$$\Delta^2 = z^* [(\varphi - f)(\varphi - f)^* - 2(\varphi - f)\lambda^* I^{-1} J + J^* I^{-1} \lambda \lambda^* I^{-1} J]\, z,$$

ледовательно, согласно (3), (4), (5) и (6)

$$\mathbf{M}\Delta^2 = z^* [B - 2J^* I^{-1} J + J^* I^{-1} I I^{-1} J]\, z = z^* B z - z^* J^* I^{-1} J z.$$

силу неотрицательности дисперсии отсюда следует справедливость неравенства (7). то неравенство превратится в равенство тогда и только тогда, когда $\mathbf{D}\Delta = 0$, что в вою очередь возможно лишь тогда и только тогда, когда, с вероятностью единица, $= 0$. В силу (9) последнее условие эквивалентно равенству (8). Теорема доказана.

Замечания и следствия

1. Если $f(a) \equiv a$ и $s = 1$ (т. е. если компонентами вектора λ являются первые астные производные $\partial \ln p(\xi \mid a)/\partial a_i$ $(i = 1, \ldots, m)$), то J — единичная матрица, а $= \mathbf{M}\lambda\lambda^*$ — так называемая информационная матрица Р. А. Фишера. Неравенство (7) в том случае превращается в обычное неравенство Крамера — Рао (неравенство информации) [4, 5].

2. Квадратичная форма в правой части (7) неотрицательна, так как по определению есть корреляционная матрица случайного вектора λ ($\mathbf{M}\lambda = 0$).

3. Легко можно убедиться, что эта форма инвариантна относительно перестановок омпонент вектора λ и соответствующих строк матрицы J. Иными словами, $z^* J^* I^{-1} J z$ е зависит от порядка нумерации отношений (5) (изменение нумерации меняет лишь орядок расположения слагаемых квадратичной формы).

4. Наиболее важным для приложений свойством квадратичной формы в правой асти (7) является монотонная зависиммость от r (т. е. от размерности вектора λ), сли у λ вычеркнуть некоторые компоненты, а затем вычеркнуть соответствующие троки матрицы J, то для новых матриц I_0 и J_0 будет выполняться неравенство

$$z^* J^* I^{-1} J z \geqslant z^* J_0^* I_0^{-1} J_0 z. \tag{10}$$

Таким образом, с увеличением размерности вектора λ точность оценки $z^* B z$ снизу ожет лишь повышаться.

Согласно третьему замечанию для доказательства (10) достаточно ограничиться лучаем, когда у вектора λ вычеркнута одна последняя компонента λ_r, а у матрицы J ычеркнута последняя строка.

Лемма. *Пусть I — произвольная симметрическая положительно определенная атрица порядка r, и пусть I_0 — матрица, полученная в результате вычеркивания оследней строки и последнего столбца матрицы I. В таком случае для любого $w \in \mathfrak{R}$ праведливо неравенство*

$$w^* I^{-1} w \geqslant w_0^* I_0^{-1} w_0, \tag{11}$$

де $w^* = (w_1, \ldots, w_{r-1}, w_r)$, $w_0^* = (w_1, \ldots, w_{r-1})$.

Доказательство этой леммы можно осуществить, например, либо методами инейной алгебры (путем разбиения матрицы I на клетки), либо с помощью свойств многомерного нормального распределения. В данной заметке второй способ предпочтительнее.

* Другое краткое доказательство теоремы Крамера—Рао указано О. В. Шалаевским и публикуется в этом же номере журнала.

Если элементы матрицы I^{-1} обозначить c_{ij}, то легко можно убедиться в справедливости тождества

$$w^*I^{-1}w \equiv \sum_{i,j=1}^{r} c_{ij}w_iw_j \equiv \sum_{i,j=1}^{r-1}\left(c_{ij}-\frac{c_{ir}c_{rj}}{c_{rr}}\right)w_iw_j + c_{rr}\left(w_r+\frac{1}{c_{rr}}\sum_{i=1}^{r-1}c_{ir}w_i\right)^2. \quad (1$$

Пусть $p(w)$ и $p_0(w_0)$ — плотности нормальных распределений с нулевыми средними корреляционными матрицами I и I_0 соответственно. Из условия леммы следует, что

$$p_0(w_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(w)\,dw_r.$$

Так как

$$p(w) = (2\pi)^{-\frac{r}{2}}|I|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}w^*I^{-1}w\right),$$

то в силу (12) отсюда получаем

$$p_0(w_0) = (2\pi)^{-\frac{r-1}{2}}(c_{rr}|I|)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r-1}\left(c_{ij}-\frac{c_{ir}c_{rj}}{c_{rr}}\right)w_iw_j\right].$$

С другой стороны, по определению,

$$p_0(w_0) = (2\pi)^{-\frac{r-1}{2}}|I_0|^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}w_0^*I_0^{-1}w_0\right),$$

следовательно,

$$w_0^*I_0^{-1}w_0 = \sum_{i,j=1}^{r-1}\left(c_{ij}-\frac{c_{ir}c_{rj}}{c_{rr}}\right)w_iw_j \quad \text{и} \quad |I_0| = c_{rr}|I|.$$

Таким образом, в силу тождества (12) имеем

$$w^*I^{-1}w \geqslant w_0^*I_0^{-1}w_0.$$

Лемма доказана.

Неравенство (10) получается из (11) при $w = Jz$, так как в этом случае $w_0 = J_0$.

5. Основная теорема останется справедливой и тогда, когда распределение случайной величины ξ дискретно (в формулировке теоремы и в доказательстве нужно будет лишь заменить интегралы соответствующими суммами и в качестве $p(x \mid a)$ выбрать $\mathbf{P}\{\xi = x \mid a\}$).

6. Полученные результаты можно распространить на тот случай, когда, вместо k-мерного вектора $f(a)$, требуется оценить некоторую функцию $f(a, t)$, где $a \in \mathfrak{A}$, $t \in \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{R}_1$ (предполагается, что $\mathfrak{T}$ не зависит от a). Обозначим $\varphi(\xi, t)$ несмещенную оценку для функции $z(a, t)$ и предположим, что существует корреляционная функция

$$B(t_1, t_2; a) = \mathbf{M}[\varphi(\xi, t_1) - f(a, t_1)][\varphi(\xi, t_2) - f(a, t_2)] \quad (t_1, t_2 \in \mathfrak{T}).$$

Имеет место

Теорема. *Пусть плотность вероятности удовлетворяет условиям 1 и 2 основной теоремы, а также условию*

3. *Существуют частные производные от функции $f(a, t)$ по параметрам $a_1, \ldots, a_r$ до порядка s включительно, причем имеет место тождество* (ср. с (6)):

$$\mathbf{M}\varphi\lambda \equiv J \quad (a \in \mathfrak{A},\ t \in \mathfrak{T}),$$

где $J^*(t) = (f_1(a, t), \ldots, f_r(a, t))$ — вектор, компоненты которого представляют собой частные производные

$$\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_m}}{\partial a_1^{i_1}\ldots\partial a_m^{i_m}} f(a, t) \quad (a \in \mathfrak{A},\ t \in \mathfrak{T},\ 1 \leqslant i_1 + \ldots + i_m \leqslant s),$$

занумерованные в том же порядке, что и отношения (5).

В таком случае для любой функции $z(t)$, удовлетворяющей условию

$$\iint_{\mathfrak{X}\mathfrak{X}} B(t_1, t_2;\ a)\, z(t_1)\, z(t_2)\, dt_1 dt_2 < \infty \quad (a \in \mathfrak{A}),$$

праведливо неравенство

$$\iint_{\mathfrak{X}\mathfrak{X}} B(t_1,\ t_2;\ a)\, z(t_1)\, z(t_2)\, dt_1 dt_2 \geqslant \iint_{\mathfrak{X}\mathfrak{X}} J^*(t_1)\, I^{-1} J(t_2)\, z(t_1)\, z(t_2)\, dt_1 dt_2, \tag{13}$$

оторое превращается в равенство тогда и только тогда, когда, с вероятностью диница, имеет место равенство (8).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству основной теоремы.

7. В математической статистике традиционной мерой качества статистической оценки вляется так называемая эффективность, которая определяется как отношение нижней раницы для дисперсии (по неравенству Крамера — Рао) к истинной дисперсии оценки см., например, [4] гл. 32 и сноска на стр. 522). Случаи, когда при ограниченном исле наблюдений эффективность равна единице, осуществляется довольно редко: как правило, нижняя грань дисперсий всех регулярных несмещенных оценок функции $f(a)$ казывается больше этой границы, которая определяется неравенством Крамера — Рао (подробнее об этом см. [3] гл. VIII). Поэтому эффективность, по сути дела, представляет собой не меру качества оценки, а, скорее, меру качества нижней границы в неравенстве Крамера — Рао; если оценка является наилучшей (т. е. если ее дисперсия равна упомянутой выше точной нижней грани), то отличие эффективности от единицы нельзя считать показателем неудовлетворительности оценки. С этой точки зрения более естественной мерой качества следовало бы считать отношение дисперсии наилучшей оценки к дисперсии данной оценки. Для такой меры эффективность представляла бы собой оценку снизу, полезную в тех случаях, когда дисперсия наилучшей оценки неизвестна. Уточненное неравенство Крамера — Рао (7) позволяет эту оценку улучшить. Более того, во многих случаях, когда обычная эффективность меньше единицы, с помощью (7) удается вычислить точное значение такой меры (см. ниже примеры 1 и 2).

Пусть φ и Φ — несмещенные оценки для f, и пусть B_φ и B_Φ — корреляционные матрицы этих оценок. По аналогии с одномерным случаем дадим следующее

О п р е д е л е н и е. Компоненты вектора Φ называются совместно наилучшими оценками для компонент вектора f, если для любой несмещенной оценки φ матрица $(B_\varphi - B_\Phi)$ неотрицательна, т. е. $z^*(B_\varphi - B_\Phi)\, z \geqslant 0$.

Примером совместно наилучших оценок являются совместно эффективные оценки (см., например, [4, 5]). Очевидно также, что в тех случаях, когда совместно эффективные оценки не существуют, но уточненное неравенство Крамера — Рао (7) для Φ обращается в равенство, то $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ — совместно наилучшие оценки.

8. Уточнению неравенства Крамера — Рао посвящена большая работа А. Бхаттачария [1], опубликованная в 1946—1948 гг. В этой работе рассмотрены следующие случаи: 1) $k = 1$, $m = 1$ (оценивается одна функция от одного неизвестного параметра), 2) $k = 1$, m произвольное (оценивается одна функция от m неизвестных параметров). В данной заметке уточненное неравенство выведено для произвольных k и m, включая случай $k = \infty$, когда, вместо вектора $f(a)$, оценивается функция $f(a, t)$ (см. основную теорему и замечание 6). Метод доказательства основной теоремы представляет собой упрощенный вариант метода, использованного в работе [1]. Полученные результаты при $k = 1$ совпадают с результатами [1].

Примеры

Теория оценок для единственной функции ($k = 1$) от неизвестных параметров подробно и с примерами изложена в [1], ряд примеров имеется также в [2]. В этом разделе будут рассматриваться лишь примеры, в которых $k > 1$ (случай совместной оценки нескольких функций). Легко можно убедиться, что во всех примерах удовлетворяются требования, обеспечивающие справедливость уточненного неравенства Крамера — Рао. В первом примере случайная величина ξ распределена непрерывно, $k = 2$, $m = 2$; во втором примере ξ распределена дискретно, $k = 2$, $m = 1$; в третьем примере ξ распределена непрерывно, $k = \infty$, $m = 2$.

1. Нормальное распределение. Пусть ξ — нормально распределенная случайная величина с функцией правдоподобия

$$p(\xi \mid a, \sigma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(\xi_i - a)^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[S^2 - n(\overline{\xi} - a)^2]}, \quad (1$$

где

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \quad \text{и} \quad S^2 = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \overline{\xi})^2 \quad (1$$

(параметры a и σ предполагаются неизвестными). Как известно, случайные величины $\overline{\xi}$ и S^2 независимы (см., например, [4]), причем $\eta = \sqrt{n}(\overline{\xi} - a)/\sigma$ распределена нормально $(0, 1)$, а $\chi^2 = S^2/\sigma^2$ подчиняется χ^2-распределению с $n-1$ степенями свободы. В качестве компонент вектора λ выберем

$$\lambda_1 = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\eta, \quad \lambda_2 = \frac{1}{p}\frac{\partial^2 p}{\partial a^2} = \frac{n}{\sigma^2}(\eta^2 - 1), \quad \lambda_3 = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma}(\chi^2 + \eta^2 - n),$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{p}\frac{\partial^2 p}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}[(\chi^2 + \eta^2 - n)^2 - (3\chi^2 + 3\eta^2 - n)],$$

тогда

$$I = \mathbf{M}\lambda\lambda^* = \frac{n}{\sigma^4}\begin{Vmatrix} \sigma^2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 2n, & 2\sigma, & 2 \\ 0, & 2\sigma, & 2\sigma^2, & 2\sigma \\ 0, & 2, & 2\sigma, & 6(4n+3) \end{Vmatrix},$$

$$I^{-1} = \frac{1}{8n(n-1)(3n+2)}\begin{Vmatrix} 8(n-1)(3n+2), & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 4\sigma^2(3n+2), & -4\sigma(3n+2), & 0 \\ 0, & -4\sigma(3n+2), & 12n^2+9n-1, & -\sigma(n-1) \\ 0, & 0, & -\sigma(n-1), & \sigma^2(n-1) \end{Vmatrix}$$

Пусть требуется оценить $f_1 = a$ и $f_2 = \sigma$, т. е. $f^* = (a, \sigma^2)$. Так как

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} = 1, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2} = \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial f_2}{\partial a} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} = 2\sigma, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial \sigma^2} = 2,$$

то

$$J^* = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 2\sigma, & 2 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad J^* I^{-1} J = \begin{Vmatrix} \frac{\sigma^2}{n}, & 0 \\ 0, & \frac{2\sigma^4}{n-1} \end{Vmatrix}.$$

С другой стороны, если $\varphi_1 = \overline{\xi}$ и $\varphi_2 = S^2/(n-1)$, то, как известно (см., например, [4]), $\varphi^* = (\varphi_1, \varphi_2)$ — несмещенная оценка для $f^* = (a, \sigma^2)$, причем

$$\mathbf{M}(\varphi - f)(\varphi - f)^* = \begin{Vmatrix} \frac{\sigma^2}{n}, & 0 \\ 0, & \frac{2\sigma^4}{n-1} \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, для φ неравенство (7) обращается в равенство, поэтому $\overline{\xi}$ и $S^2/(n-1)$ — совместно наилучшие оценки для a и σ^2 соответственно.

Точно так же можно показать, что оценки для неизвестных параметров и дисперсии в классической линейной схеме метода наименьших квадратов представляют собой совместно наилучшие оценки. Заметим, что с помощью обычного неравенства Крамера—Рао (см. замечание 1) для дисперсии величины $S^2/(n-1)$ мы получили бы оценку сниз

σ^4/n. Уточненное неравенство позволило выявить экстремальные свойства оценки φ элементарными средствами (доказательство минимальности дисперсии $S^2/(n-1)$, проведенное методами теории функций комплексного переменного, изложено в учебнике [3]).

2. Распределение Пуассона. Пусть μ подчиняется распределению Пуассона с функцией правдоподобия

$$p(\mu \mid a) = \frac{a^\mu}{\mu!} e^{-a}$$

(параметр a предполагается неизвестным). В качестве компонент вектора λ выберем

$$\lambda_1 = \frac{1}{p}\frac{dp}{da} = \frac{\mu}{a} - 1 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{1}{p}\frac{d^2p}{da^2} = \left(\frac{\mu}{a}\right)^2 - \left(2 + \frac{1}{a}\right)\frac{\mu}{a} + 1,$$

тогда в силу замечания 5

$$I = \mathrm{M}\lambda\lambda^* = \frac{1}{a^2}\begin{Vmatrix} a, & 0 \\ 0, & 2 \end{Vmatrix}, \quad I^{-1} = \frac{a}{2}\begin{Vmatrix} 2, & 0 \\ 0, & a \end{Vmatrix}.$$

Пусть требуется оценить $f^* = (a, a^2)$. Так как

$$\frac{df_1}{da} = 1, \quad \frac{d^2f_1}{da^2} = 0, \quad \frac{df_2}{da} = 2a, \quad \frac{d^2f_2}{da^2} = 2,$$

то

$$J^* = \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 2a, & 2 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad J^*I^{-1}J = 2a^2\begin{Vmatrix} \frac{1}{2a}, & 1 \\ 1, & 2a+1 \end{Vmatrix}.$$

Легко можно убедиться, что $\varphi^* = (\mu, \mu(\mu-1))$ — несмещенная оценка для f^*, причем

$$\mathrm{M}(\varphi - f)(\varphi - f)^* = 2a^2\begin{Vmatrix} \frac{1}{2a}, & 1 \\ 1, & 2a+1 \end{Vmatrix},$$

т. е. μ и $\mu(\mu-1)$ — совместно наилучшие оценки для a и a^2. Если бы мы для построения матрицы I воспользовались лишь первыми производными, то в правом нижнем углу матрицы $J^*I^{-1}J$, вместо $2a^2(2a+1)$, стояло бы $4a^3$, и соответствующее неравенство Крамера — Рао не обращалось бы в равенство.

3. Оценка нормальных квантилей. Пусть ξ снова имеет функцию правдоподобия (14), и пусть требуется оценить линейную функцию

$$f = \sigma t + a \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Иными словами, требуется оценить $F(t)$-квантили нормального распределения с параметрами (a, σ) ($F(t)$ — функция нормального распределения с параметрами $(0,1)$). Так как в данном случае

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma} = t, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} = 0,$$

и матрица I — та же, что и в первом примере, то

$$J^* = (1, 0, t, 0) \quad \text{и} \quad J^*I^{-1}J = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2(12n^2 + 9n - 1)}{8n(n-1)(3n+2)}\, t_1 t_2.$$

В качестве оценки для f воспользуемся линейной функцией

$$\varphi = \frac{K_n S}{\sqrt{n-1}}\, t + \overline{\xi}, \quad \text{где} \quad K_n = \sqrt{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

а $\overline{\xi}$ и S определяются формулами (15). Как известно (см., например, [4]), φ — несмещенная оценка для f; легко можно убедиться, что корреляционная функция оценки φ

в данном случае определяется формулой

$$B(t_1, t_2; a, \sigma) = \frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2 \left(K_n^2 - 1 \right) t_1 t_2.$$

Если положим

$$\int_{-\infty}^{\infty} z(t)\, dt = u, \quad \int_{-\infty}^{\infty} tz(t)\, dt = v,$$

то неравенство (13) можно будет записать так:

$$\frac{\sigma^2}{n} u^2 + \sigma^2 (K_n^2 - 1) v^2 \geqslant \frac{\sigma^2}{n} u^2 + \frac{\sigma^2 (12n^2 + 9n - 1)}{8n (n-1)(3n+2)} v^2. \tag{16}$$

Неуточненное неравенство Крамера — Рао (см. замечание 1) имеет вид:

$$\frac{\sigma^2}{n} u^2 + \sigma^2 (K_n^2 - 1) v^2 \geqslant \frac{\sigma^2}{n} u^2 + \frac{\sigma^2}{2n} v^2. \tag{17}$$

Согласно определению дисперсии в многомерном случае (см., например, [4]) эффективность e оценки φ вычисляется как квадрат отношения объема корреляционного эллипсоида $z^* Bz = 1$ к объему эллипсоида, соответствующего квадратичной форме в правой части неуточненного неравенства Крамера — Рао. В данном случае в силу (17) имеем

$$e_n = \frac{1}{2n (K_n^2 - 1)} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Если $n = 2$, то $e_2 = 0{,}44$, если же $n = 3$, то $e_3 = 0{,}61$. Малая эффективность при $n = 2$ и 3 объясняется тем, что оценка (17) является слишком грубой. Действительно, если отказаться от (17) и применить определение эффективности к неравенству (16), то получим

$$E_n \quad \frac{12n^2 + 9n - 1}{4(n-1)(3n+2)} \cdot \frac{1}{2n (K_n^2 - 1)} \to 1 \quad (n \to \infty),$$

причем $E_2 = 0{,}89$ и $E_3 = 0{,}93$ (см. замечание 7). Есть основания предполагать, что $\varphi(t)$ — (совместно) наилучшая оценка для f, однако доказать это с помощью уточненного неравенства Крамера — Рао при ограниченном числе производных не удается.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10.1.61

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Bhattacharyya, On some analogues of the amount of information and their uses in statistical estimation, Sankhya, 8, 1 (1946), 1—14 (ch. I); 3 (1947), 201—218 (ch. II, III); 4 (1948), 315—328 (ch. IV).
[2] Н. Ф. Быстров, О некоторых несмещенных оценках, Вестн. Ленингр. ун-та, 1 (1956), 169—175.
[3] Б. Л. Ван дер Варден, Математическая статистика, М., ИЛ., 1960.
[4] Г. Крамер, Математические методы статистики, М., ИЛ, 1948.
[5] Ю. В. Линник, Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений, М., Физматгиз, 1958.

THE REFINEMENT OF THE CRAMÉR — RAO INEQUALITY

L. N. BOLSHEV (MOSCOW)

(Summary)

This paper deals with the strengthening of the Cramér — Rao information inequality when simultaneous efficient estimates do not exist.

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

И. С. ВОЛКОВ

1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — случайные величины, заданные на однородной цепи аркова с конечным числом состояний $E_1, E_2, \ldots, E_m$ и матрицей переходных веро-ностей $P = \| p_{ik} \|$. Будем считать, что возможными значениями ξ_n являются целые отрицательные числа $s_1, \ldots, s_m : \xi_n = s_i$, если $e(n) = E_i$ ($e(n)$ — состояние цепи, со-ветствующее моменту времени n, $e(0)$ — фиксированное начальное состояние). Из до-занной в [2] локальной предельной теоремы для больших уклонений суммы $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ итекает следующий результат:

Пусть матрица P является неразложимой, ациклической, и пусть $\delta < \alpha < \Delta$

$_n \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и*

$$(\alpha + \tau_n) \cdot n - f(q, \ldots, j) + s_q \equiv T(n - q)(q, \ldots, j) + 1) \pmod{d},$$

огда при $n \to \infty$

$$\frac{\ln P_{q,j}(n, (\alpha + \tau_n) n)}{n} \to \ln \frac{\lambda_0(r(\alpha))}{r^{\alpha}(\alpha)}. \tag{1}$$

Здесь δ и Δ — соответственно, наименьший и наибольший из удельных весов циклов ассматриваемой цепи (см. [2], § 2); $\lambda_0(x)$ $(0 < x < +\infty)$ — наибольшее положительное арактеристическое число матрицы $\| p_{ik} \cdot x^{s_k} \|$ (в [2] доказано, что $\lambda_0(x)$ — однознач-ая аналитическая функция x на бесконечном интервале $(0, +\infty)$); $r(\alpha)$ — положитель-ый корень уравнения $\lambda_0'(x)/\lambda_0(x) = \alpha/x$ (в [2] доказано, что корень $r(\alpha)$ существует единствен); $f(q, \ldots, j)$ и $g(q, \ldots, j)$ — соответственно, вес и длина произвольной епочки, соединяющей состояние E_q с E_j (см. [2], § 2); T и d — некоторые постоянные, меющие тот же смысл, что и в [2]; и, наконец,

$$P_{qj}(n, s) = P\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n = s, e(n) = E_j \mid e(0) = E_q\}.$$

Соотношение (1) можно распространить и на циклические цепи; для этого доста-очно дополнительно потребовать, чтобы $n - g(q, \ldots, j) + 1 \equiv 0 \pmod{D}$, где D — ин-екс импримитивности матрицы P (см. [3]). Отметим также, что соотношение (1) верно в том случае, когда $\sum_{k=1}^{m} p_{ik} < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, т. е. тогда, когда состояния E_q, E_j вляются несущественными.

При исследовании вероятностей $P_{qi}(n, (\alpha + \tau_n) n)$ представляется важным выяснить, каких границах заключены значения величины $\lambda_0(r(\alpha))/r^{\alpha}(\alpha)$. Этот вопрос решается настоящей заметке.

Теорема 1. а) $\psi(\alpha) = \lambda_0(r(\alpha))/r^{\alpha}(\alpha)$ *является однозначной, аналитической функ-цией* α *на интервале* (δ, Δ).

б) *в точке* $\alpha_0 = \lambda_0'(1)/\lambda_0(1)$ *функция* $\psi(\alpha)$ *достигает максимума, равного* $\lambda_0(1)$. *На* $(\delta, \alpha_0]$ *функция* $\psi(\alpha)$ *монотонно возрастает, а на* $[\alpha_0, \Delta)$ *— монотонно убывает.*

в) $\psi(\alpha) \to \psi_{\delta}$ *при* $\alpha \downarrow \delta$; $\psi(\alpha) \to \psi_{\Delta}$ *при* $\alpha \uparrow \Delta$, *где* ψ_{δ} (ψ_{Δ}) *— наибольшее положи-тельное характеристическое число матрицы* $\| a_{ik}(\delta) \|$ (*соответственно,* $\| a_{ik}(\Delta) \|$), *эле-менты которой определяются равенствами:*

$$a_{ik}(\omega) = \begin{cases} p_{ik}, & \text{если переход } E_i \to E_k \text{ содержится хотя} \\ & \text{бы в одном цикле с удельным весом } \omega; \\ 0 — & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. а) Воспользуемся следующими соотношениями, вытекающими из [2]:

$$\lambda_0(x) = \psi_\delta x^\delta + o(x)^\sigma \quad \text{и} \quad x\lambda_0'(x) = \delta\psi_\delta x^\delta + o(x^\delta) \text{ при } x \downarrow 0, \tag{2}$$

$$\lambda_0(x) = \psi_\Delta x^\Delta + o(x^\Delta) \quad \text{и} \quad x\lambda_0'(x) = \Delta\psi_0' x^\Delta + o(x^\Delta) \text{ при } x \to +\infty. \tag{3}$$

Пусть $\varphi(x) = x\lambda_0'(x)/\lambda_0(x)$. На основании (2) и (3) заключаем: $\varphi(x) \downarrow \delta$ при $x \to 0$; $\varphi(x) \to \Delta$ при $x \to +\infty$. Далее вычисляем:

$$\varphi'(x) = \frac{\lambda_0'(x)}{\lambda_0(x)} + x\,\frac{\lambda_0''(x)\lambda_0(x) - \lambda_0'^2(x)}{\lambda_0^2(x)}. \tag{4}$$

Согласно теореме 2 из [2] правая часть в (4) строго положительна для всех конечных положительных x, если только δ отлично от Δ. Следовательно, при $\delta \neq \Delta$ функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает на $(0, +\infty)$. В этих условиях по теореме о неявных функциях уравнение $\varphi(x) = \alpha$ определяет в интервале $\delta < \alpha < \Delta$ однозначную аналитическую и монотонно возрастающую функцию $x = r(\alpha)$. Из однозначности и аналитичности $\lambda_0(x)$ и $r(\alpha)$ вытекает, что утверждение а) теоремы 1 справедливо.

б) Исследуем функцию $\psi(\alpha)$ на экстремум. Формула для производной

$$\psi'(\alpha) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\lambda_0(x)}{x^\alpha}\right]_{x=r(\alpha)} \cdot r'(\alpha) - \psi(\alpha)\ln r(\alpha)$$

с учетом определения $r(\alpha)$ и рассуждений п. а)) позволяет сделать вывод: равенство $\psi'(\alpha) = 0$ возможно тогда и только тогда, когда $r(\alpha) = 1$. В силу п. а) данной теоремы существует одно и только одно значение α_0 в (δ, Δ), удовлетворяющее условию $r(\alpha_0) = 1$, причем $\alpha_0 = \lambda_0'(1)/\lambda_0(1)$. Так как $r(\alpha)$ в интервале (δ, Δ) растет монотонно, то при $\delta < \alpha < \alpha_0$ имеем $\psi'(\alpha) > 0$, а при $\alpha_0 < \alpha < \Delta$ имеем $\psi'(\alpha) < 0$.

в). Пусть $\alpha \to \delta + 0$; представим функцию $\psi(\alpha)$ в виде

$$\psi(\alpha) = \lambda_0(r(\alpha))\,\frac{r^{\delta-\alpha}(\alpha)}{r^\delta(\alpha)}.$$

На основании (2), предел отношения $\lambda_0 r^\delta$ при $\alpha \downarrow \delta$ существует и равен ψ_δ. Что касается множителя $r^{\delta-\alpha}$, то он стремится к 0, так как вследствие алгебраичности функции $\lambda_0(r)$ разность $\delta - \alpha$ имеет по r степенной порядок малости. Таким образом, $\psi(\alpha) \to \psi_\delta$ при $\alpha \downarrow \delta$. Аналогично доказывается, что $\psi(\alpha) \to \psi_\Delta$ при $\alpha \uparrow \Delta$.

2. Результаты, полученные в пп. б) и в) теоремы 1, позволяют сделать следующие выводы: наибольшее значение функции $\psi(\alpha)$ на (δ, Δ) равняется $\lambda_0(1)$ и не зависит от чисел $s_1, \ldots, s_m$; точная нижняя граница значений функции $\psi(\alpha)$ на (δ, Δ) равняется $\min\{\psi_\delta, \psi_\Delta\}$ и зависит как от p_{ik} $(1 \leqslant i,k \leqslant m)$, так и от s_i.

Пусть $\bar{\psi}$ — точная верхняя, а $\underline{\psi}$ — точная нижняя границы возможных значений $\min\{\psi_\delta, \psi_\Delta\}$ при фиксированной матрице P и различных наборах $\{s_1, \ldots s_m\}$ из m целых неотрицательных чисел. В том случае, когда все s_i равны между собой, имеем $\delta = \Delta$, $\psi_\delta = \psi_\Delta = \lambda_0(1)$; следовательно, $\bar{\psi} = \lambda_0(1)$. Значение $\underline{\psi}$ указывает

Теорема 2. $\underline{\psi} = \min\limits_{(E_{i_1} E_{i_2} \ldots E_{i_l})} R(i_1, i_2, \ldots, i_l)$, *где*

$$R(i_1, i_2, \ldots, i_l) = \sqrt[l]{p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_l i_1}}$$

и $(E_{i_1}, \ldots, E_{i_l})$ *пробегает множество циклов, в которых все состояния различны и каждый из которых может быть единственным циклом с наименьшим удельным весом.*

Доказательство. Как известно (см., например, [3]), наибольшее положительное характеристическое число неразложимой матрицы с неотрицательными элементами уменьшится, если хотя бы один из ее положительных элементов заменить на нуль. Обращаясь к определению чисел ψ_δ, ψ_Δ, видим, что минимум величины ψ (P — фикси-

вано) был бы, наверное, достигнут, если бы тот цикл, на котором обращается в ми-
мум выражение $R(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ оказался единственным циклом с наименьшим (или
ибольшим) удельным весом. Такая возможность осуществима: это видно из леммы 5 [2].

3. Теорема 1 позволяет обобщить интегральную предельную теорему для больших
лонений суммы $\xi_1 + \ldots + \xi_n$, доказанную в [2] в предположении, что выполнены
венства

$$\sum_{k=1}^{m} p_{ik} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{5}$$

ействительно, справедливость лемм 6 и 7 была установлена в [2], § 4 вне зависимости
условий (5). Следовательно, при отказе от требований (5) утверждение теоремы 4
[2] остается в силе, а значения вероятностей

$$F_{q,j}(n, (\alpha + \tau_n) n) = P\{\xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant (\alpha + \tau_n) n,\ e(n) = E_j \mid e(0) = E_q\},$$

аваемые теоремой 5 из [2], оказываются больше вероятностей, соответствующих данно-
у случаю, ровно в $\lambda_0^{-n}(1)$ раз. При этом в формулировках данных теорем условия

$< \sum_{i=1}^{m} s_i p_i$, $\alpha > \sum_{i=1}^{m} s_i p_i$, $\alpha = \sum_{i=1}^{m} s_i p_i$ следует заменить более общими: $\alpha < \alpha_0$, $\alpha > \alpha_0$,

$= \alpha_0$. В новых условиях также имеется возможность вывода для $F_{qi}(n(\alpha + \tau_n) n)$
симптотических разложений на основании лемм 6 и 7 из [2].

Поступила в редакцию
20.1.60.

ЛИТЕРАТУРА

1] А. Н. Колмогоров, Цепи Маркова со счетным множеством возможных состоя-
ний, Бюл. М. ун-та, А, 1 : 3 (1937).
2] И. С. Волков, О распределении сумм случайных величин, заданных на однородной
цепи Маркова с конечным числом состояний, Теория вероят. и ее примен., **III**, 4,
(1958), 413—439.
3] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., ГИТТЛ, 1953.

ANALYSIS OF SOME LIMIT THEOREMS FOR LARGE DEVIATIONS

I. S. VOLKOV (*MOSCOW*)

(Summary)

The asymptotic formulas obtained in [2] are examined. The term $\lambda_0[r(\alpha)]/r^{\alpha}(\alpha)$ is studied as a function of α and it is established that $\max \lambda_0[r(\alpha)]/r^{\alpha}(\alpha)$, with probabilities p_{ik} fixed does not depend on the values of the random variables.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОДНОГО КЛАССА БЕЗГРАНИЧНО-ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В. М. ЗОЛОТАРЕВ

1. Описание безгранично делимых законов распределений (б. д. з.) проводится, как известно, в терминах соответствующих им характеристических функций $f(t)$. Мы будем пользоваться формулой, предложенной П. Леви *

$$\log f(t) = it\gamma - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \int_{-\infty}^{\infty}{}' \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dH(u), \tag{1}$$

в которой γ, σ — вещественные параметры и $H(u)$ — неубывающая на полуосях $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ функция, стремящаяся к нулю при $|u| \to \infty$ и такая, что

$$\int_{|u|\leq 1}{}' u^2\, dH(u) < \infty$$

($H(u)$ называется спектральной функцией (с. ф.) б. д. з.). Каждый б. д. з. однозначно определяется, таким образом, заданием γ, σ^2 и H (мы будем называть их определяющими элементами б. д. з.).

Обозначим $G(x) = G(x, \gamma, \sigma^2, H)$ функцию распределения (ф. р.) б. д. з. с определяющими элементами γ, σ^2, H, и $\Phi_\sigma(x)$ — ф. р. нормального закона с параметрами $(0, \sigma^2)$. Нашей задачей будет исследование асимптотического поведения $1 - G(x)$ и $G(-x)$ при $x \to \infty$ в терминах определяющих элементов для б. д. з. со с. ф. из классов ${}_\beta\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}^\beta$, определяемых следующим образом.

Определение. С. ф. б. д. з. $H(u)$ относится нами к классу $\mathfrak{H}^\beta$ (соответственно к ${}_\beta\mathfrak{H}$), если в интервале $(1, \infty)$ она может быть представлена в виде $H(u) = u^{-\beta}h(u)$ (соответственно в $(-\infty, -1)$—в виде $H(u) = -|u|^{-\beta}h(|u|)$), где функция $h(u) < 0$ такова, что при любом постоянном $k > 0$ $h(ku) \sim h(u)$, когда $u \to \infty$.

2. Центральным результатом настоящей заметки является

Теорема 1. *Если с. ф. $H(x)$ б. д. з. $G(x)$ принадлежит $\mathfrak{H}^\beta$, то при $x \to \infty$*

$$1 - G(x, \gamma, \sigma^2, H) \sim -H(x). \tag{2}$$

Замечание. Поскольку всегда

$$G(-x, \gamma, \sigma^2, H) = 1 - G(x, -\gamma, \sigma^2, \widetilde{H}),$$

где $\widetilde{H}(u) = -H(-u)$, то тем самым решается вопрос об асимптотическом поведении $G(-x)$ при $x \to \infty$ для б. д. з. со с. ф. из классов ${}_\beta\mathfrak{H}$.

Доказательство сформулированной теоремы мы начнем с простейшей редукции нашей задачи и доказательства нескольких лемм. Заметим, что если при $x \to \infty$

$$1 - G(x, \gamma, \sigma^2, H) \sim x^{-\beta}h(x),$$

то для любого значения γ', отличного от γ, по-прежнему будет при $x \to \infty$

$$1 - G(x, \gamma', \sigma^2, H) \sim x^{-\beta}h(x).$$

Следовательно, в рамках нашей задачи мы всегда можем пренебрегать величиной постоянного смещения б. д. з.

3. Нормальная составляющая б. д. з. может так же игнорироваться, как и постоянное смещение. Это обстоятельство становится очевидным, если принять во внимание следующую элементарную лемму.

Лемма 1. *Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — произвольные ф. р. и $R(x) = P * Q$ — их свертка.*

---

* Штрих означает, что из области интегрирования исключена точка 0.

да для любых положительных x, ε *и* δ *имеют место неравенства*

$$1-R(x)<1-P(x-x\delta)+[1-P(x+x\varepsilon)]\,Q(-x\varepsilon)+1-Q(x\delta),$$
$$1-R(x)>1-P(x+x\varepsilon)-[1-P(x+x\varepsilon)]\cdot[1-Q(x\delta)+Q(-x\varepsilon)].$$

Доказательство.

$$1-R(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[1-P(x-xu)]\,dQ(xu)=\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{-\varepsilon}^{\delta}+\int_{\delta}^{\infty}=I_1+I_2+I_3.$$

инимая во внимание монотонность функций P и Q, получаем оценки, из которых и текает утверждение леммы:

$$0<I_1<[1-P(x+x\varepsilon)]\,Q(-x\varepsilon);\ 0<I_3<1-Q(x\delta);$$
$$[1-P(x-x\delta)]\cdot[Q(x\delta)-Q(-x\varepsilon)]<I_2<1-P(x+x\varepsilon).$$

олагая в лемме 1 $\varepsilon=\delta=x^{-\frac{1}{2}}$, $(x>0)$, $Q(x)=\Phi_\sigma(x)$ и $P(x)=G(x,\gamma,0,H)$, по-чаем, что

$$1-G(x,\gamma,\sigma^2,H)=1-G(x,\gamma,0,H)*\Phi_\sigma(x)\sim x^{-\beta}h(x),$$

ли только $1-G(x,\gamma,0,H)\sim x^{-\beta}h(x)$.

4. Всякая с. ф. H может быть представлена в виде

$$H(u)=M(u)+N(u),$$

де M и N — хорошо известные функции Леви:

$$M(u)=\begin{cases}H(u), & \text{если } u<0\\ 0, & \text{если } u>0;\end{cases}\qquad N(u)=\begin{cases}0, & \text{если } u<0.\\ H(u), & \text{если } u<0.\end{cases}$$

ледовательно,

$$G(x,\gamma,0,H)=G(x,\gamma,0,M)*G(x,\gamma,0,N). \tag{3}$$

Лемма 2. *Если* $H(u)\equiv 0$ *для* $u>A\geqslant 0$, *то*

$$1-G(x,\gamma,\sigma^2,H)=\exp(-\Omega(x)),$$

де $\dfrac{\Omega(x)}{x}\to\infty$ *при* $x\to\infty$.

Эта лемма представляет собой легко получаемое следствие леммы 2 работы автора [5].

Полагая теперь в лемме 1 $\varepsilon=\delta=x^{-\frac{1}{2}}$, $P(x)=G(x,\gamma,0,N)$, $Q(x)=G(x,\gamma,0,M)$ и привлекая лемму 2, мы получаем в соответствии с (3), что

$$1-G(x,\gamma,0,H)\sim x^{-\beta}h(x),$$

если только $1-G(x,\gamma,0,N)\sim h^{-\beta}h(x)$ при $x\to\infty$.

5. Введем r-усечение $H^{<r>}(u)$ с. ф. $H(u)$ условием $(r>0)$:

$$H^{<r>}(u)=\begin{cases}H(u), & \text{если } |u|\geqslant r;\\ H(r\operatorname{sgn}u), & \text{если } |u|<r.\end{cases}$$

Тогда с. ф. $H(u)$, очевидно, можно представить в виде

$$H(u)=H^{<r>}(u)+\overline{H}^{<r>}(u), \tag{4}$$

где $\overline{H}^{<r>}(u)\equiv 0$ при $|u|\geqslant r$. Как функция $H^{<r>}$, так и ее дополнение $\overline{H}^{<r>}$ являются с. ф. некоторых б. д. з. Отсюда, принимая во внимание (4), получаем

$$G(x,\gamma,\sigma^2,H)=G(x,\gamma,\sigma^2,H^{<r>})*G(x,\gamma,\sigma^2,\overline{H}^{<r>}).$$

Опять же на основании лемм 1 и 2 получаем, что при $x\to\infty$

$$1-G(x,\gamma,\sigma^2,H)\sim x^{-\beta}h(x),$$

если только $1-G(x,\gamma,\sigma^2,H^{<r>})\sim x^{-\beta}h(x)$.

6. Суммируя все сказанное, мы можем сказать, что при $x \to \infty$

$$1 - G(x, \gamma, \sigma^2 H) \sim x^{-\beta} h(x),$$

если только $1 - G(x, \gamma_r, 0, N^{<r>}) \sim x^{-\beta} h(x)$, где последний б. д. з. за счет специального выбора смещения γ_r имеет характеристическую функцию вида

$$f_r(t) = \exp\left\{\int_0^\infty (e^{itu} - 1)\, dN^{<r>}(u)\right\} = \exp\left\{-it\int_0^\infty e^{itu} N^{<r>}(u)\, du\right\}.$$

Как следует из леммы 1 [5], ф. р. $G(x) = G(x, \gamma_r, 0, N^{<r>})$ равна нулю на отрицательной полуоси и, следовательно,

$$f_r(t) = 1 + it\int_0^\infty e^{itu}[1 - G(u)]\, du = \exp\left\{-t^t\int_0^\infty e^{itu} N^{<r>}(u)\, du\right\}.$$

Устроим аналитическое продолжение обеих частей этого равенства в полуплоскость $\operatorname{Im} t \geqslant 0$ и рассмотрим значения продолжений при $t = is$ $(s \geqslant 0)$:

$$\varphi_r(s) = 1 + s\int_0^\infty e^{-sx}[1 - G(x)]\, dx = \exp\left\{s\int_0^\infty e^{-sx} N^{<r>}(x)\, dx\right\}.$$

Нетрудно видеть, что при $s \downarrow 0$ (напомним, что $N^{<r>}(u) \leqslant 0$)

$$\int_0^\infty e^{-sx}[1 - G(x)]\, dx \sim -\int_0^\infty e^{-sx} N^{<r>}(x)\, dx.$$

Воспользуемся теперь следующей леммой, представляющей собой комбинацию хорошо известных теорем абелева и тауберова типа для преобразований Лапласа (их можно найти, например, в [1]).

Лемма 3. *Пусть $U(x) = x^\alpha h(x)$ при больших значениях x ($\alpha \geqslant 0$ и $h(x)$ — медленно меняющаяся функция на бесконечности), и пусть $V(x)$ — невозрастающая. Тогда из*

$$\int_0^\infty e^{-sx} U(x)\, dx \sim \int_0^\infty e^{-rx} V(x)\, dx,$$

при $s \downarrow 0$ следует асимптотическая эквивалентность подынтегральных функций при $x \to \infty$, т. е.

$$U(x) \sim V(x).$$

На основании этой леммы мы можем утверждать, что при $x \to \infty$ $(x > r)$

$$1 - G(x, \gamma, \sigma^2, H) \sim 1 - G(x, \gamma_r, 0, N)^{<r>}) \sim -N^{<r>}(x) = -H(x).$$

Чем, собственно, и завершается доказательство теоремы.

Замечание к теореме 1. Применявшийся нами метод доказательства фактически нигде, за исключением леммы 3, не использовал по существу предположение принадлежности с. ф. б. д. з. к классу $\mathfrak{S}^\beta$. Поскольку леммы 1 и 2 позволяют утверждать, что

$$1 - G(x, \gamma, \sigma^2, H) \sim 1 - R(x, \gamma, 0, N^{<r>}) \quad \text{при } x \to \infty,$$

если существуют такие положительные постоянные a_r и A_r, что

$$1 - G(x, \gamma, 0, N^{<r>}) > \exp(-a_r x) \quad x > A_r,$$

то распространение утверждения теоремы на более широкие классы б. д. з. всецело зависит от распространения леммы 3.

Хотя для функций показательного порядка убывания теорема, аналогичная доказанной, получена быть не может, как показывает следующий пример

$$\gamma_0 = 1 - \int_0^\infty \frac{u^3}{1+u^2} e^{-u}\, du, \quad \sigma = 0, \quad N(x) = -\int_x^\infty e^{-u} \frac{du}{u} \sim -\frac{1}{u} e^{-x},$$

$$1 - G(x, \gamma_0, 0, N) = e^{-x},$$

но, возможно, удастся для функций, более медленно убывающих к нулю.

Вместе с тем может оказаться справедливым в более общем случае несколько ослабленное утверждение (с одним или несколькими логарифмами):

$$\log [1 - G(\tau, \gamma, \sigma^2, H)] \sim \log | H(x) | \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

7. Б. д. з. со с. ф. из классов $\mathfrak{H}^\beta$ по своему поведению и свойствам очень близки к представителям тех же классов — устойчивым законам распределения, которые в настоящее время изучены достаточно хорошо. Это было уже видно по теореме 1, обобщающей аналогичные теоремы Бергстрёма [2] и Чжао Чжун-чжэ [3]. Мы приведем здесь еще одну теорему в подкрепление высказанной точки зрения. Эта теорема является непосредственным обобщением теоремы 5 работы автора [4].

По аналогии с определением класса $\mathfrak{H}^\beta$ будем говорить, что с. ф. $H(u) \in \mathfrak{H}_\alpha$, если в интервале $(0,1)$ она может быть представлена в виде $H(u) = u^{-\alpha} h(u)$, где $h(u)$ такова, что для любого положительного k, $h(ku) \sim h(u)$ при $u \downarrow 0$ (из условия (2) вытекает, что $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$). Обозначим $\mathfrak{N}_\alpha^\beta = \mathfrak{H}_\alpha \cap \mathfrak{H}^\beta$ и выделим в классе всех б. д. з. однопараметрические семейства ф. р. $\{G_\alpha(x)\} = \mathfrak{U}(c_1, c_2)$ условиями:

1) Характеристическая функция $f_\alpha(t)$ б. д. з. $G_\alpha(x) \in \mathfrak{U}(c_1, c_2)$ имеет вид

$$f_\alpha(t) = \exp\left\{\int_0^\infty (e^{itu} - 1)\, dN_\alpha(u)\right\}, \text{ где } N_\alpha \in \bigcup_\alpha \mathfrak{H}_\alpha^\alpha.$$

2) $$\lim_{\alpha \downarrow 0} \lim_{u \downarrow 0} u^\alpha N_\alpha(u) = c_1 \leqslant \lim_{\alpha \downarrow 0} \lim_{u \to \infty} u^\alpha N_\alpha(u) = c_2 \neq 0.$$

(Принимая во внимание отрицательность функции $N_\alpha(u)$, нетрудно показать, что $c_2 < 0$.)

Теорема 2. *Если ф. р.* $G_\alpha(x)$ *принадлежит* $\mathfrak{U}(c_1, c_2)$, *то при* $\alpha \downarrow 0$ *ф. р.* $G_\alpha(x^{1/\alpha})$ *либо сходится к ф. р.*

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \exp\left(\dfrac{c_1}{x}\right), & 0 < x \leqslant 1 \\ \exp\left(\dfrac{c_2}{x}\right), & 1 < x \end{cases}$$

Если, к тому же, $c_1 = c_2 = c$, *то*

$$\sup_{x>0} \left| G_\alpha(x^{1/\alpha}) - \exp\left(\frac{c}{x}\right) \right| \to 0 \quad \text{при } \alpha \downarrow 0.$$

Первое утверждение теоремы является следствием теоремы 2а [4] и того факта, что для $s \neq 1$ преобразование Лапласа — Стильтьеса

$$\Phi_\alpha(s^{-1/\alpha}) = \int_0^\infty \exp(-s^{-1/\alpha} x)\, dG_\alpha(x) \to V(s), \text{ когда } \alpha \downarrow 0.$$

Второе же вытекает из того, что в случае непрерывности предельного распределения слабая сходимость всегда влечет за собой равномерную.

Поступила в редакцию
5. 5. 61

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Doetsch, Handbuch der Laplase Transformation, Bd. I, Basel und Stuttgart, 1955.
[2] H. Bergström, On distribution functions with a limiting stable distribution function, Arkiv for Math., **2**, 5 (1953), 463—474.
[3] Чжао Чжун-чжэ, Explicit formula for the stable low Шусюэ сюэбао (Acta Math. Sinica), **3**, 3 (1953), 177—185.
[4] В. М. Золотарев, Преобразования Меллина—Стильтьеса в теории вероятностей, Теория вероят. и ее примен., **II**, 4 (1957), 444—469.
[5] В. М. Золотарев, Распределение суперпозиции безгранично делимых процессов, Теория вероят. и ее примен., **III**, 2 (1958), 197—200.

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF A CLASS OF INFINITELY DIVISIBLE LAWS

V. M. ZOLOTAREV (MOSCOW)

(Summary)

The parameters γ, σ^2 and the function $H(u)$ give in P. Levy's formula (1) a certain infinitely divisible law. The class $\mathfrak{H}^\beta$ forms those functions $H(u)$, which for large positive u can be presented in the form $H(u) = u^{-\beta}h(u)$, where $\beta \geqslant 0$ and $h(ku) \sim h(u)$ when $u \to \infty$ for any constant $k > 0$.

Theorem 1 proves that for distribution functions of infinitely divisible laws $G(x, \gamma, \sigma^2, H)$, whose function H belongs to one of the $\mathfrak{H}^\beta$, the following asymptotic presentation holds true

$$1 - G(x, \gamma, \sigma^2, H) \sim -H(x).$$

In theorem 2 for infinitely divisible laws $\{G_\alpha\}$ of a more constrict monoparametric family $\mathfrak{A}$ than considered in theorem 1 ($\mathfrak{A}$ is defined in section 7) the weak and uniform convergence of the functions $G_\alpha(x^{1/\alpha})$ to the universality law $V(x)$ is proved.

ОБ АСИМПТОТИКЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В РЕШЕТЧАТОЙ СХЕМЕ БЛУЖДАНИЯ

В. С. КОРОЛЮК

1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных решетчатых случайных величин с максимальным шагом $\varepsilon = 1/\sqrt{n}$. Предельное поведение при $n \to \infty$ распределения сумм $s_n = \sum_{r=1}^{n} \xi_r$ и распределений функционалов от сумм $s_k = \sum_{r=1}^{k} \xi_r$ $(0 \leqslant k \leqslant n;\ s_0 = 0)$ в определенных условиях описывается решениями дифференциальных уравнений в частных производных. Начало такого подхода положено работами А. Н. Колмогорова [1,2].

В настоящей работе излагается алгоритм построения асимптотических разложений для распределений достаточно гладких функционалов от сумм s_k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, при этом применяется метод асимптотического анализа уравнений, содержащих малый параметр (см. [3—5]).

2. Пусть задано распределение вероятностей

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_r = k\varepsilon\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{1}$$

лусть

$$p(\lambda) = \sum_k p_k \lambda^k \qquad (2)$$

его производящая функция. Введем распределение

$$R_n(x) = \mathbf{P}\{a_- < s_r < a_+,\ 0 \leqslant r \leqslant n;\ s_n = x\}$$

рассмотрим функционал от функции $f(x)$

$$u_\varepsilon(f) = \sum_x f(x) R_n(x), \qquad (3)$$

е суммирование ведется по всем возможным значениям из области определения функ-й, стоящих под знаком суммы. Нашей задачей является построение для функционала (f) асимптотического разложения

$$u_\varepsilon(f) \sim \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_k,$$

котором при $\varepsilon \to 0$ левая часть отличается от правой величиной $o(\varepsilon^N)$.

Приведем следующий результат. Пусть $f(x)$ имеет в отрезке $[a_-, a_+]$ непрерывные роизводные до 9-го порядка включительно и обращается в нуль вместе со своими роизводными вне интервала (a_-, a_+). Пусть существуют первые шесть моментов рас-ределения (1), причем

$$\mathbf{M}\xi_r = 0;\ \mathbf{D}\xi_r = \frac{1}{n} = \varepsilon^2;\ \mathbf{M}\xi_r^m = \varepsilon^m c_m\ (m \geqslant 3).$$

огда для функционала $u_\varepsilon(f)$ имеет место асимптотическая формула

$$u^\varepsilon(f) \sim u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2, \qquad (4)$$

которой коэффициенты u_0, u_1, u_2 представляют собой значения функций $u_0(x, t)$, $_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ в точке $x = t = 0$. Функция $u_0(x, t)$ — решение уравнения

$$\mathbf{L}_0 u_0 \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, \qquad (5)$$

удовлетворяющее при $0 \leqslant t < 1$ условиям:

$$\left.\begin{aligned} u_0(a_-, t) = u_0(a_+, t) = 0, \\ u_0(x, 1) = f(x); \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$u_1(x, t)$ — решение уравнения

$$\mathbf{L}_0 u_1 = -\frac{c_3}{6}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \qquad (7)$$

с условиями ($0 \leqslant t < 1$):

$$\left.\begin{aligned} u_1(a_\pm, t) = -\frac{p'_+(1)}{p_\pm(1)}\frac{\partial u_0(a_\pm, t)}{\partial x}, \\ u_1(x, 1) = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

$u_2(x, t)$ — решение уравнения

$$\mathbf{L}_0 u_2 = -\frac{c_3}{6}\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - \frac{c_4}{24}\frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \qquad (9)$$

с условиями ($0 \leqslant t < 1$):

$$\left.\begin{aligned} u_2(a_\pm, t) = \pm\frac{p'_+(1)}{p_\pm(1)}\frac{\partial u_1(a_+, t)}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{p'_+(1) + p''_+(1)}{p_\pm(1)}\frac{\partial^2 u_0(a_+, t)}{\partial x^2}, \\ u_2(x, 1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Здесь $p_-(\lambda)$ и $p_+(\lambda)$ — аналитические функции, отличные от нуля соответственно вне и внутри единичного круга. Они определяются из разложения производящей функции

$$p(\lambda) - 1 = \left(\lambda - 2 + \frac{1}{\lambda}\right) p_+(\lambda)\, p_-(\lambda). \tag{11}$$

Имеют место формулы:

$$\ln p_-(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=1} \frac{\ln[(p(\zeta)-1)(\zeta - 2 + \zeta^{-1})^{-1}]}{\zeta - \lambda}\, d\zeta \quad (|\lambda| > 1), \tag{12}$$

$$\ln p_+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta|=1} \frac{\ln[(p(\zeta)-1)(\zeta - 2 + \zeta^{-1})^{-1}]}{\zeta - \lambda}\, d\zeta \quad (|\lambda| < 1). \tag{13}$$

3. Исходным пунктом для построения разложения (4) будет служить разностное уравнение. Введем функции

$$R_k(x, t) = \mathbf{P}\{a_- < s_r < a_+,\ [nt] \leqslant r \leqslant n;\ s_n = \varepsilon k \mid s_{[nt]} = \varepsilon x\},$$

$$u_\varepsilon(x, t; f) = \sum_k f(\varepsilon k)\, R_k(x, t);$$

функция $u_\varepsilon(x, t; f)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$u_\varepsilon\left(x, t - \frac{1}{n}\right) = \sum_k p_k u_\varepsilon(x + k\varepsilon, t) \tag{14}$$

и определяется следующими условиями:

$$u_\varepsilon(a_- - k\varepsilon, t) = u_\varepsilon(a_+ + k\varepsilon, t) = 0 \quad (k \geqslant 0), \tag{15}$$

$$u_\varepsilon(x, 1) = f(x). \tag{16}$$

Очевидно, что

$$u_\varepsilon(f) = u_\varepsilon(0, 0; f). \tag{17}$$

Таким образом, асимптотическое разложение функционала $u_\varepsilon(f)$ может быть построено по асимптотике решения разностного уравнения (14) с условиями (15) и (16). Асимптотический анализ этого уравнения осуществим методом, изложенным в работе [5]. Суть метода состоит в том, что регулярные члены асимптотического разложения решения уравнения (14) определяются из дифференциальных уравнений, при этом в связи с возможностью перескока через границы $x = a_-$ и $x = a_+$ граничные условия определяются по эффекту решения уравнения (14) типа пограничного слоя (см. [4]). Для построения рекуррентного процесса, определяющего последовательно члены асимптотики решения рассматриваемой задачи, представим это решение $u_\varepsilon(x, t)$ асимптотическим рядом

$$u_\varepsilon(x, t) \sim \sum_{m=0}^{N} \varepsilon^m u_m(x, t) + \sum_{m=0}^{N-1} \varepsilon^{m+1} \left[v_m^-\left(\frac{x - a_-}{\varepsilon}, t\right) + v_m^+\left(\frac{x - a_+}{\varepsilon}, t\right)\right]. \tag{18}$$

Если разностный оператор, определяющий уравнение (14), запишем в виде

$$(\Delta_t - \mathbf{P}_\varepsilon) u_\varepsilon = [u_\varepsilon(x, t - \varepsilon^2) - u_\varepsilon(x, t)] - \left[\sum_k p_k u_\varepsilon(x + k\varepsilon, t) - u_\varepsilon(x, t)\right],$$

то уравнения для регулярных членов асимптотики $u_m(x, t)$ можно будет получить, разлагая этот оператор в ряд по дифференциальным операторам:

$$\varepsilon^{-2}(\Delta_t - \mathbf{P}_\varepsilon) = \mathbf{L}_0 + \varepsilon \mathbf{L}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{L}_2 + \ldots,$$

подставляя в этот ряд разложение (18) (с учетом пограничных слоев):

$$\mathbf{L}_0 u_m = -\sum_{r=3}^{m+2} \frac{c_r}{r!} \frac{\partial^r u_{m+2-r}}{\partial x^r} + \sum_{s=2}^{\left[\frac{m}{2}\right]+1} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{\partial^s u_{m+2-2s}}{\partial t^s} + \\ + \varepsilon^{-2} \sum_{r=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^r}{r!} \left[\frac{\partial^r v^-_{m-1-2r}}{\partial t^r} + \frac{\partial v^+_{m-1-2r}}{\partial t^r} \right] (m \geqslant 2), \tag{19}$$

где u_0 и u_1 — решения уравнения (5) и (7) соответственно.

Построение уравнений для $v^{\pm}(z, t)$ обеспечивает следующая

Лемма 1. *Для производящей функции (2) решетчатого распределения (1) с равным нулю математическим ожиданием имеет место разложение (11), где $p_+(\lambda)$ и $p_-(\lambda)$ аналитичны соответственно внутри и вне единичного круга и отличны от нуля в указанных областях; при этом имеют место формулы (12) и (13).*

Для доказательства леммы покажем, что функция

$$p_1(\lambda) = [p(\lambda) - 1](\lambda - 2 + \lambda^{-1})^{-1}$$

удовлетворяет условиям теоремы о факторизации на окружности (см. [6], стр. 37). Действительно, единица является единственным корнем $p(\lambda) - 1$ кратности 2 на единичной окружности, следовательно,

$$p_1(\lambda) \neq 0 \text{ при } |\lambda| = 1 \tag{20}$$

Далее очевидно, что при $|\lambda| = 1$,

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \arg [p(\lambda) - 1] \leqslant \frac{3\pi}{2},$$

и так как на единичной окружности $\arg(\lambda - 2 + \lambda^{-1}) = \pi$, то $|\arg p_1(\lambda)| \leqslant \pi/2$. Поэтому

$$\operatorname{ind}_{|\lambda|=1} p_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d_\theta \arg p_1(e^{i\theta}) = 0. \tag{21}$$

Условия (20) и (21) обеспечивают каноническую факторизацию функции $p_1(\lambda)$ на единичной окружности, т. е. разложение (11) с формулами (12) и (13).

Таким образом, уравнения для пограничных слоев на границе $x = a_-$ имеют вид ($E\varphi(x) = \varphi(x+1)$):

$$p_-(E)\, v^-_m(z, t) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} p^-_r v^-_m(z - r, t) = 0 \ (z > 0) \tag{22}$$

и на границе $x = a_+$:

$$p_+(E)\, v^+_m(z, t) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} p^+_r v^+_m(z + r, t) = 0, \ (z < 0). \tag{23}$$

Граничные условия для пограничных слоев и регулярных членов асимптотики строятся следующим образом. Перепишем исходные граничные условия (15) через разности:

$$\nabla^s u_\varepsilon(a_-, t) = 0; \quad \Delta^s u_\varepsilon(a_+, t) = 0 \quad (s \geqslant 0),$$

где $\Delta\varphi(x) = \varphi(x + \varepsilon) - \varphi(x)$ и $\nabla\varphi(x) = \Delta\varphi(x - \varepsilon)$. Из разложения (18) получаем граничные условия для регулярных членов, выраженные через значения пограничных слоев:

$$u_0(a_-, t) = u_0(a_+, t) = 0,$$

$$u_m(a_-, t) = -v^-_{m-1}(0, t), \ u_m(a_+, t) = -v^+_m(0, t).$$

Далее, применяя к (18) операторы ∇^s и Δ^s в точках $x = a_-$ и $x = a_+$ соответственно и заменяя разности от регулярных членов производными по формулам (см. [7], стр. 19):

$$\Delta^s\varphi \sim \sum_{\nu=s}^{N} \frac{\Delta^s 0^\nu}{\nu!}\varepsilon^\nu\varphi^{(\nu)} \text{ и } \nabla^s\varphi \sim \sum_{\nu=s}^{N}(-1)^{\nu-s}\frac{\Delta^s 0^\nu}{\nu!}\varepsilon^\nu\varphi^{(\nu)},$$

где $\Delta^s 0^\nu$ — разности нуля: $\Delta^s 0^\nu = \sum_{r=0}^{s-1}(-1)^r C_s^r (s-r)^\nu$, получим граничные условия для пограничных слоев:

$$\Delta^s v_m^+(0,t) = -\sum_{\nu=s}^{m+1}\frac{\Delta^s 0^\nu}{\nu!}\frac{\partial^\nu u_{m+1-\nu}(a_+,t)}{\partial x^\nu} \quad (1 \leqslant s \leqslant m+1), \tag{24}$$

$$\Delta^{m+1+r} v_m^+(0,t) = 0 \quad (r>0),$$

и аналогично

$$\Delta^s v_m^-(0,t) = -\sum_{\nu=s}^{m+1}(-1)^{\nu-s}\frac{\Delta^s 0^\nu}{\nu!}\frac{\partial^\nu u_{m+1-\nu}(a_-,t)}{\partial x^\nu} \quad (1 \leqslant s \leqslant m+1), \tag{25}$$

$$\Delta^{m+1+r} v_m^-(0,t) = 0.$$

Следующая лемма несколько обобщает лемму 2 работы [5].

Лемма 2. *Для пограничных слоев* $v^+(z)$ *и* $v^-(z)$, *определяемых уравнениями* (22) (23) *и граничными условиями*

$$\nabla^s v^-(0) = \Lambda_s \ (1 \leqslant s \leqslant m+1), \ \nabla^{m+1+r} v^-(0) = 0 \quad (r>0),$$
$$\Delta^s v^+(0) = \mu_s \ (1 \leqslant s \leqslant m+1), \ \Delta^{m+1+r} v^+(0) = 0 \quad (r>0),$$

значения в нуле определяются соотношениями:

$$v^-(0) = -\sum_{s=1}^{m+1}\frac{(-1)^s}{s!}\frac{\Lambda_s}{p_-(1)}\frac{d^s}{ds^s}\left[p_-\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]_{\lambda=1},$$

$$v^+(0) = -\sum_{s=1}^{m+1}\frac{\mu_s}{s!\,p_+(1)}\frac{d^s}{d\lambda^s}[p_+(\lambda)]_{\lambda=1}.$$

Учитывая эту лемму, граничные условия для регулярных членов можно выразить в следующей форме:

$$u_m(a_-,t) = -\sum_{\nu=1}^{m} B_\nu \frac{\partial^\nu u_{m-\nu}(a_-,t)}{\partial x^\nu}, \ B_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\sum_{s=1}^{\nu}\frac{\Delta^r 0^\nu}{r!\,p_-(1)}\frac{d^r}{d\lambda^r}\left[p_-\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]_{\lambda=1},$$

$$u_m(a_+,t) = -\sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \frac{\partial^\nu u_{m-\nu}(a_+,t)}{\partial x^\nu}, \ A_\nu = \frac{1}{\nu!}\sum_{r=1}^{\nu}\frac{\Delta^r 0^\nu}{r!\,p_+(1)}\frac{d^r}{d\lambda^r}[p_+(\lambda)]_{\lambda=1}.$$

Тем самым имеется возможность определять регулярные члены асимптотики без построения пограничных слоев.

4. Для обоснования применимости изложенного алгоритма построения асимптотических разложений нам понадобится свойство дифференцируемости решений уравнения теплопроводности

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{26}$$

Лемма 3. *Пусть* $f(x)$ *непрерывно дифференцируема* N *раз на отрезке* $[a_-, a_+]$ *и обращается в нуль вне интервала* (a_-, a_+) *вместе со своими производными; пусть* $\varphi(t)$ *на отрезке* $[0,1]$ N *раз непрерывно дифференцируема и обращается в нуль вместе со своими производными при* $t=0$. *Тогда*

а) *решение уравнения* (26) *с условиями*

$$u(x,0) = f(x), \qquad u(a_-,t) = u(a_+,t) = 0 \tag{27}$$

N раз непрерывно дифференцируемо по x в $[a_-, a_+]$ равномерно по t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ и обращается в нуль вместе с производными по x в точках $(a_-, 0)$ и $(a_+, 0)$;

б) решение уравнения (26) с условиями

$$u(a_+, t) = \varphi(t),\ u(a_-, t) = (x, 0) = 0 \tag{28}$$

$2N$ раз непрерывно дифференцируемо по x в $[a_-, a_+]$ равномерно по t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Справедливость утверждения а) легко следует из представления решения (26) с условиями (27) в виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} f^*(x + z\sqrt{t})\, dz,$$

где при $a_- \leqslant x \leqslant a_+$ $f^*(x) = f(x)$, а вне $[a_-, a_+]$ $f^*(x)$ нечетным образом периодически продолжена с периодом $2(a_+ - a_-)$. Утверждение б) также проверяется непосредственно по формуле решения (26) с условиями (28).

Таким образом, если $f(x)$ непрерывно дифференцируема в $[a_-, a_+]$ N раз и обращается в нуль вместе со своими производными вне (a_-, a_+), то, используя лемму 3, получаем, что регулярные члены асимптотики $u_m(x, t)$ $(m = 0,1,2)$, определенные уравнениями (5), (7), (9) с условиями (6), (8) (10) соответственно, непрерывно дифференцируемы по x в $[a_-, a_+]$ равномерно по t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ $N - 3m$ раз. Отметим, если исходное распределение величины скачка имеет M конечных абсолютных моментов, то пограничный слой $v_m(z)$, определяемый уравнением (22) или (23) и условиями (24) или (25), имеет $M - m - 4$ конечных моментов. Наличие конечных моментов у пограничных слоев обеспечивает достаточно быстрое стремление их к нулю на бесконечности (это и объясняет название решения уравнений (22) и (23) пограничными слоями).

5. Обоснование асимптотического разложения (18) при $N = 2$ проведем методом верхних и нижних функций. Оценим прежде всего невязки, которые создает отрезок асимптотического ряда (18)

$$w_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon\left[(v_0^- + v_0^+) + \varepsilon(v_1^- + v_1^+)\right]$$

при подстановке в уравнение (14) с граничными условиями (15). Разностный оператор $\Delta_t - \mathbf{P}_\varepsilon$, определяющий (14), разлагается в ряд следующим образом:

$$\varepsilon^{-2}(\Delta_t - \mathbf{P}_\varepsilon) = \mathbf{L}_0 + \varepsilon\mathbf{R}_{0\varepsilon} = \mathbf{L}_0 + \varepsilon\mathbf{L}_1 + \varepsilon^2\mathbf{R}_{1\varepsilon} = \mathbf{L}_0 + \varepsilon\mathbf{L}_1 + \varepsilon^2\mathbf{L}_2 + \varepsilon^3\mathbf{R}_{2\varepsilon}, \tag{29}$$

где

$$\mathbf{R}_{0\varepsilon}u(x, t) \equiv \frac{1}{6}\sum_k k^3 p_k \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x + \theta_k \cdot k\varepsilon, t) - \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t - \theta_t\varepsilon^2),$$

$$\mathbf{R}_{1\varepsilon}u(x, t) \equiv \frac{1}{24}\sum_k k^4 p_k \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x + \theta_k \cdot k\varepsilon, t) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t - \theta_t\varepsilon^2),$$

$$\mathbf{R}_{2\varepsilon}(x, t) \equiv \frac{1}{5!}\sum_k k^5 p_k \frac{\partial^5}{\partial x^5} u(x + \theta_k \cdot k\varepsilon, t) - \frac{\varepsilon}{6}\frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x, t - \theta_t \cdot \varepsilon^2).$$

Чтобы применить (29) к регулярным членам асимптотики, построим для них при каждом t $(0 \leqslant t < 1)$ непрерывно дифференцируемое продолжение вне (a_-, a_+) с помощью отрезка ряда Тейлора, что возможно, так как функции $u_m(x, t)$ непрерывно дифференцируемы в $[a_-, a_+]$. Положим при $x < a_-$ $(k = 5 - m)$

$$u_m(x, t) = \omega(x - a_-)\left[u_m(a_-, t) + (x - a_-)\frac{\partial u_m(a_-, t)}{\partial x} + \ldots + \frac{(x - a_-)^k}{k!}\frac{\partial^k u_m(a_-, t)}{\partial x^k}\right],$$

где $\omega(x)$ — сглаживающая бесконечно дифференцируемая функция, равная единице в окрестности $x = 0$ и стремящаяся к нулю на бесконечности быстрее любой степени x. Аналогично осуществляется гладкое продолжение $u_m(x, t)$ для $x > a_+$. Теперь регулярные члены асимптотики определены для всех x и в исходном уравнении создают невязку вида:

$$\varepsilon^{-2}(\Delta_t - \mathbf{P}_\varepsilon)(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2) = \varepsilon^2 [\mathbf{R}_{0\varepsilon} u_2 + \mathbf{R}_{1\varepsilon} u_1 + \mathbf{R}_{2\varepsilon} u_0], \tag{30}$$

причем для всех x, t $(0 \leqslant t < 1)$ и $\varepsilon > 0$ $|\mathbf{R}_{0\varepsilon} u_2 + \mathbf{R}_{1\varepsilon} u_1 + \mathbf{R}_{2\varepsilon} u_2| < C = \text{const}$. Пограничные слои создают невязку вида:

$$(\Delta_t - \mathbf{P}_\varepsilon)(\varepsilon v_0^\pm + \varepsilon^2 v_1^\pm) = \varepsilon \Delta_t (v_0^\pm + \varepsilon v_1^\pm). \tag{31}$$

Наконец, невязка в выполнении граничных условий при $x > a_+$ (и аналогично при $x < a_-$) с учетом граничных условий для регулярных членов и пограничных слоев имеет вид:

$$w_\varepsilon(a_+ + k\varepsilon, t) = \varepsilon^3 \left[\frac{k^3}{6} \frac{\partial^3 \widetilde{u}_0}{\partial x^3} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \widetilde{u}_1}{\partial x^2} + k \frac{\partial \widetilde{u}_2}{\partial x} \right], \tag{32}$$

причем при $x > a_+$ для всех $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{\partial^{3-m} \widetilde{u}_m}{\partial x^{3-m}} \right| \leqslant C_m \qquad (m = 0, 1, 2)$$

(производные вычисляются в промежуточных точках вида $x = a_+ + \theta_k \cdot k\varepsilon$).

Построим теперь верхнюю функцию $\overline{u}_\varepsilon(x, t)$ для решения $u(x, t)$ уравнения (14) с условиями (15) и (16), удовлетворяющую следующим неравенствам:

1) $u_\varepsilon(x, 1) \geqslant f(x)$;

2) $\overline{u}_\varepsilon(x, t) \geqslant 0$ при $0 \leqslant t < 1$ и $x \leqslant a_-$ или $x \geqslant a_+$;

3) $(\Delta_t - \mathbf{P}_\varepsilon)\overline{u}_\varepsilon \geqslant 0$ для $a_- < x < a_+$ и $0 \leqslant t < 1$.

Из этих условий следует, что $\overline{u}_\varepsilon(x, t) \geqslant u_\varepsilon(x, t)$. Положим

$$\overline{u}_\varepsilon(x, t) = w_\varepsilon(x, t) + \varepsilon^2 \left[C(1-t) + q^+\left(\frac{x - a_+}{\varepsilon}, t \right) + q^-\left(\frac{x - a_-}{\varepsilon}, t \right) + B \right],$$

где $C(1-t)$ компенсирует невязку (30) в исходном уравнении регулярными членами асимптотики:

$$(\Delta_t - \mathbf{P}_\varepsilon)[u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 C(1-t)] = \varepsilon^5 (\mathbf{R}_{0\varepsilon} u_2 + \mathbf{R}_{1\varepsilon} u_1 + \mathbf{R}_{2\varepsilon} u_2 + C) \geqslant 0,$$

а $q^\pm(z)$ — пограничные слои, компенсирующие невязки (31), созданные в исходном уравнении пограничными слоями $v_0^\pm$ и $v_1^\pm$, и невязки (32) в граничных условиях, созданные функцией w_ε. Пограничный слой $q^+(z)$ определим следующим образом (аналогично определяется слой $q^-(z)$). Пусть при $z < 0$

$$v^+(z) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\varepsilon^{-2} \Delta_t [v_0^+(z, t) + \varepsilon v_1^+(z, t)]|.$$

Выберем в качестве $q^+(z)$ решение разностного уравнения на полуоси $z < 0$:

$$\mathbf{P}_\varepsilon q^+(z) + v^+(z) = 0$$

с условиями при $z > 0$

$$q^+(z) = C_0 z^3 + C_1 z^2 + C_2 z$$

(решение такого уравнения см. в [6]). Тогда

$$(\Delta_t - \mathbf{P}_\varepsilon)(\varepsilon v_0^+ + \varepsilon^2 v_1^+ + \varepsilon^3 q^+) = \varepsilon^3 [-\mathbf{P}_\varepsilon q^+ + \varepsilon^{-2} \Delta_t (v_0^+ + \varepsilon v_1^+)] \geqslant 0$$

и при $x > a_+$ $w_\varepsilon(x, t) + \varepsilon^3 q^+ \geqslant 0$. Наконец, постоянная B выбирается так, чтобы при $z > 0$ сумма $q^+(-z) + q^-(z) + B$ была неотрицательна, это обеспечивает выполнение первого неравенства для верхней функции.

Аналогично может быть построена нижняя функция $\underline{u}_\varepsilon(x, t) \leqslant u_\varepsilon(x, t)$, отличающаяся от $w_\varepsilon(x, t)$ на величину порядка $O(\varepsilon^3)$, и, таким образом, мы приходим к соотношению

$$u_\varepsilon(x, t) = w_\varepsilon(x, t) + O(\varepsilon^3).$$

Учитывая, что если у исходного распределения существуют шесть моментов, то пограничные слои стремятся к нулю внутри (a_-, a_+), как $o(\varepsilon)$, мы получаем для x из отрезка $[a_- + \delta, a_+ - \delta]$ $(\delta > 0)$ представление искомого решения

$$u_\varepsilon(x, t) = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + O(\varepsilon^3).$$

Тем самым доказан результат, сформулированный в п. 2.

В заключение заметим, что изложенный алгоритм с соответствующими изменениями (см. [4], § 2) может быть применен и тогда, когда исходное распределение величины скачка зависит от x. Эта зависимость должна быть достаточно гладкой, чтобы обеспечить непрерывную дифференцируемость регулярных членов асимптотики.

Поступила в редакцию
5.3.60.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. N. Kolmogorov, Einige Veralgemeinerung des Laplace — Liapounoffschen Satzes, Изв. АН СССР, сер. матем., 15 (1931), 805—808.
[2] A. N. Kolmogoroff, Über die Grentzwertsätze der Warscheinlichkeitsrechnung, Изв. АН СССР, сер. матем., 17 (1933), 363—372.
[3] И. И. Гихман, Об одной асимптотической теореме для сумм малых случайных слагаемых, Тр. Ин-та матем. и мех. АН УзССР, в. 10, ч. 1 (1953).
[4] М. И. Вишик и Л. А. Люстерник, Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, Успехи матем. наук, **12**, 5 (1957), 3—122.
[5] В. С. Королюк, Асимптотический анализ распределений максимальных уклонений в схеме Бернулли, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 4 (1959), 369—397.
[6] М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полуоси с ядром, зависящим от разности аргументов, Успехи матем. наук, **13**, 5 (1958), 3.
[7] Ш. Е. Микеладзе, Численные методы математического анализа, М., 1953.

THE ASYMPTOTES OF SEVERAL FUNCTIONALS IN A LATTICE RANDOM WALK

***V. S. KOROLJUK** (KIEV)*

(Summary)

An algorithm is described for making asymptotic expansions of distributions of sufficiently smooth functionals of the sums of equally distributed independent lattice components. A method of asymptotic analysis of equations containing a small parameter is used in the above.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ДЕФЕКТНЫХ ЕДИНИЦ В ПАРТИЯХ ИЗДЕЛИЙ

Х. Б. КОРДОНСКИЙ

1. Общие соображения. При рассмотрении задач выборочного приемочного контроля обычно исходят из предположения, что число X дефектных единиц, в подлежащих контролю партиях, либо остается постоянным, либо имеет биномиальное распределение. На этом основано большинство зарубежных работ по приемочному контролю. В работе А. Н. Колмогорова [1] показано, что игнорирование влияния действительного распределения числа X на результаты выборочного контроля может привести к чрезмерному завышению объема выборки и общего объема контрольной работы. Там же даются исчерпывающие рекомендации по использованию несмещенных оценок для учета этого влияния. Излагаемое ниже исследование выполнено под влиянием работы А. Н. Колмогорова [1] и направлено на выяснение закономерностей распределения числа X.

2. Классификация причин появления дефектных изделий. Причины, порождающие дефектные изделия, можно разбить на следующие основные классы [2]:

А. Постоянно действующие причины. К ним относятся причины, вызывающие в течение всего хода изготовления партий некоторую, примерно постоянную вероятность e_0 появления дефектного изделия. К таким причинам можно, например, отнести несоответствие точности оборудования заданному допуску. При ручных операциях причинами этого класса являются ошибки исполнителя (см. рис. *а*, *б*, *в*).

Б. Стационарные причины. Причина этого класса при изготовлении любого изделия партии, с вероятностью γ_0, может вызвать возникновение разладки, в случае которой, с вероятностью $\xi_t > 0$, изделие может оказаться дефектным (ξ_t может претерпевать в случайные моменты времени скачкообразные изменения). В качестве примера причин этого класса можно рассматривать мгновенные засорения, мгновенные повреждения инструмента и т. д. Продолжительность T процесса изготовления изделий до разладки в этом случае подчиняется показательному распределению.

В. Нестационарные причины. Допустим, что при изготовлении каждого изделия инструмент (приспособление, станок и т. д.) получает некоторое случайное изменение $\varphi_i \geqslant 0$, где i — порядковый номер изделия. После изготовления m изделий общее изменение инструмента будет равно

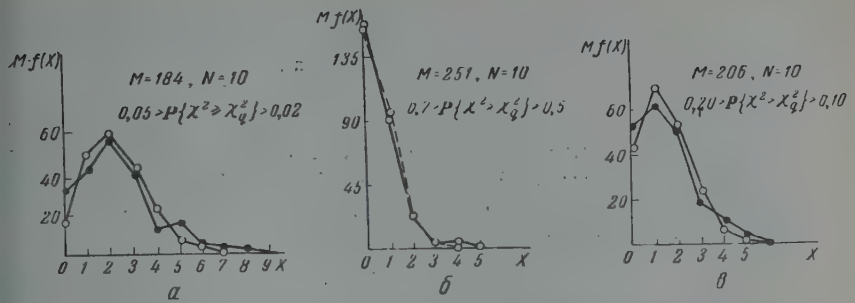
$$E = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i.$$

Действие нестационарной причины заключается в том, что по достижении E некоторого уровня Υ возникает разладка. Уровень Υ, вообще говоря, является случайным и имеет некоторое распределение. Величины $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ могут быть как зависимыми, так и независимыми. Если, например, рассматривается износ режущего инструмента, то φ_i представляет собой величину его износа за время изготовления изделия с номером i. Распределение φ_i зависит от величины исходного износа, т. е. от $\varphi_1 + \ldots + \varphi_{i-1}$, а уровень Υ претерпевает случайные колебания в зависимости от случайных колебаний состояния оборудования и режима обработки.

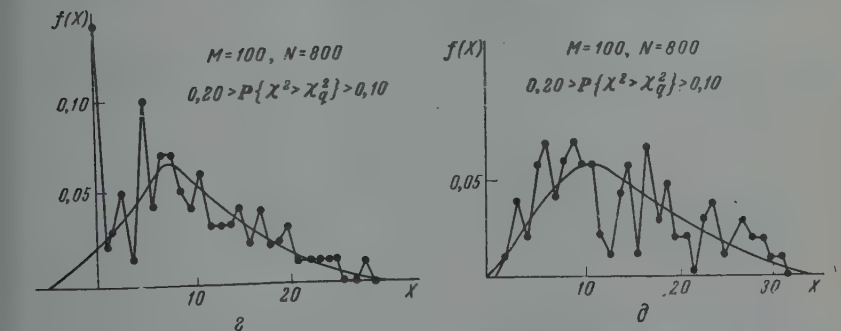
Если нестационарной причиной являются накапливающиеся засорения, то величины φ_i будут попарно независимыми. Случайные колебания Υ будут возникать здесь в связи со случайным накоплением засоряющих частиц. Практика наблюдения за распределением времени T показывает, что при нестационарной причине T имеет распределение, близкое к нормальному. Для целей изучения распределения числа X схема возникновения разладки может быть упрощена. А именно, можно предположить, что φ_i принимает лишь два значения, 0 и 1, с вероятностями $1 - \gamma_0$ и γ_0. Уровень $\gamma = k$, где k — фиксированное число. При больших k и большом $\lambda = \lim_{N \to \infty} N \cdot \gamma_0$ (N — объем партии) распределение времени T будет приближаться к нормальному.

3. Схема образования распределения числа X. Будем предполагать, что объемы всех партий одинаковы и равны N. После изготовления каждой партии процесс изготовления изделий отлаживается, и в начальный момент изготовления партии вероятность появления брака равна нулю.

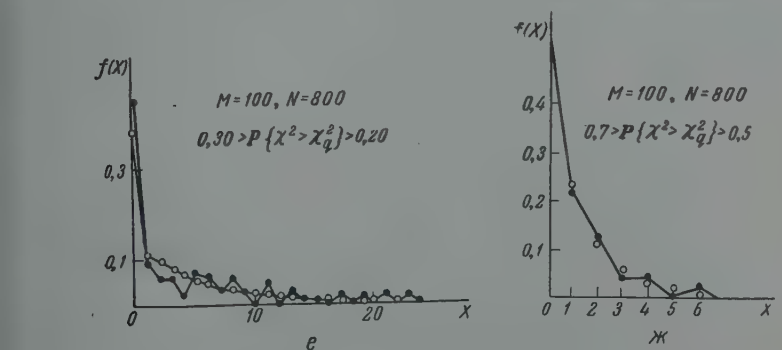
Опытные и теоретические распределения числа X (M — число партий в совокупности, N — объем партии)



Процесс ручной сборки датчика масломанометра сборщиками № 1 (рис. *а*), № 2 (рис. *б*), № 3 (рис. *в*). Причина возникновения дефектов — ошибки при сборке. Распределение биноминальное.



Процесс проточки фланца на токарном автомате (рис. *г*, *д*). Причины дефектов — ошибки при настройке и засорение базовой поверхности. Распределение соответствует композиции (6).



Процесс проточки шейки на токарном автомате. Причина дефектов — износ резца (рис. *е*). Процесс подрезка на токарном автомате. Причины дефектов — износ резца и подающего ролика (рис. *ж*). Распределения отвечают (10).

Пусть на изготовление одного изделия затрачивается время Δ. Время изготовления партии в силу этого равно $N \cdot \Delta$. Для каждого момента времени t будем характеризовать процесс числом $0 \leqslant \xi_t \leqslant 1$, где ξ_t — вероятность возникновения дефекта в момент t. При этом предполагается, что ξ_t может иметь изменения как при переходе от одного отрезка Δ к другому, так и в течение времени Δ.

Будем говорить, что процесс в момент времени t находится в состоянии e_j, если в этот момент времени $\xi_t = e_j$. Предполагается, что ξ_t — марковский процесс с конечным числом состояний $e_0, e_1, \ldots, e_\nu$. Переходы за один шаг возможны только в соседнее состояние с более высоким номером, состояние e_ν является поглощающим. Таким образом, схема переходов может быть записана как

$$e_0 \to e_1 \to e_2 \to \cdots \to e_\nu,$$

где e_0 — начальное состояние процесса. При наших предположениях $e_0 = 0$. Вероятности перехода обозначим через $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{\nu-1}$, так что вероятность перехода от e_j к e_{j+1} будет равна γ_j. Для дальнейшего нам будет удобно записывать изложенную схему течения процесса в виде цепочки

$$e_0 \underset{\gamma_0}{\to} e_1 \underset{\gamma_1}{\to} e_2 \underset{\gamma_2}{\to} \cdots \underset{\gamma_{\nu-1}}{\to} e_\nu, \tag{1}$$

где e_i, γ_j фиксированы и не зависят от номера изделия и партии. Введем случайные величины

$$\eta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = e \text{ изделие дефектное,} \\ 0, & \text{если } i = e \text{ изделие годное,} \end{cases}$$

и образуем сумму

$$X = \sum_{i=1}^{N} \eta_i$$

(где X — число дефектных изделий в партии). Здесь и далее считается что $\mathbf{P}\{\eta_i = 1\}$ равна значению ξ_t в момент окончания изготовления i-го изделия. Очевидно, что величины η_i не имеют между собой марковской связи и поэтому распределение числа X нельзя получить прямым использованием аппарата цепей Маркова. Для изложенной схемы (1) справедлива

Теорема. *Пусть $e_0 = 0$ и при $N \to \infty$ существуют*

$$\left.\begin{aligned} &\lim \frac{N \cdot \gamma_0^2}{e_i} = \mu, \text{ хотя бы при одном из } i = \overline{1, \nu}, \\ &\lim \frac{\gamma_0}{\gamma_i} = \delta_i \text{ при всех } i = \overline{1, \nu-1}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Тогда, если велики $N \cdot \gamma_0$ и хотя бы одно из отношений $\dfrac{e_i}{\gamma_0}$, то справедлива асимптотическая формула:

$$\mathbf{P}\{Z_1 \leqslant X \leqslant Z_2\} \simeq \mathbf{P}\{Z_1 \leqslant X^* \leqslant Z_2\}. \tag{3}$$

Случайная величина X^* может быть представлена как сумма независимых случайных величин

$$X^* = X_{\text{н}} - \frac{1}{2}\frac{e_\nu}{\gamma_0} X_1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu-1}\left(\frac{e_\nu}{\gamma_i} - \frac{e_i}{\gamma_i}\right) \cdot X_{i+1}, \tag{4}$$

где $X_{\text{н}}$ имеет нормальное распределение с параметрами $(N \cdot e_\nu, N \cdot e_\nu)$, а каждая из величин $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ имеет χ^2-распределение с двумя степенями свободы.

Идея доказательства сводится к следующему.

а) Если рассмотреть процесс

$$e_0 \underset{\gamma_0}{\to} e_1,$$

при $e_0 = 0$ и существовании $\lim\limits_{N\to\infty} N\cdot\gamma_0 = \lambda$; $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{e_1}{\gamma_0} = \varkappa_1$ можно показать [2], что производящая функция распределения числа X имеет вид:

$$P_X(s) = e^{-\lambda}\left[1 + \frac{1}{\varkappa_1(1-s)-1}\right] - \frac{e^{-\lambda\varkappa_1(1-s)}}{\varkappa_1(1-s)-1}. \qquad (4a)$$

переходя к нормированному отклонению случайной величины X и к характеристической функции ее распределения, прямыми вычислениями убеждаемся, что при $\nu = 1$ справедливы (3), (4).

б) Для процесса

$$e_0 \underset{\gamma_0}{\to} e_1 \underset{\gamma_1}{\to} e_2$$

производящая функция распределения числа X при $e_0 = 0$ и существовании $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{e_2}{\gamma_0} = \varkappa_2$ имеет вид

$$P_X(s) = e^{-\lambda} + \left[1 - \frac{1}{1-\delta_1\Delta_\varkappa(1-s)}\right] \frac{e^{-\lambda\varkappa_1(1-s)}\, e^{-\frac{\lambda}{\delta_1}} - e^{-\lambda}}{1 - \frac{1}{\delta_1} - \varkappa_1(1-s)} +$$

$$+ \frac{1}{1-\delta_1\Delta_\varkappa(1-s)} \cdot \frac{e^{-\lambda\varkappa_2(1-s)} - e^{-\lambda}}{1-\varkappa_2(1-s)},$$

где $\Delta_\varkappa = \varkappa_2 - \varkappa_1$. Переходя к характеристической функции нормированного отклонения, убеждаемся, что для $\nu = 2$ при больших λ и хотя бы одном из $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ справедливы (3), (4).

в) Пусть (3), (4) справедливы для всех $\nu \leqslant n-1$. Обозначим через X_{e_i} число дефектных изделий, появившихся при состоянии e_i. Так что для схемы (1)

$$X = X_{e_1} + X_{e_2} + \ldots + X_{e_{\nu-1}} + X_{e_\nu}.$$

Тогда асимптотически при $N \to \infty$ все величины X_{e_i}; $1 \leqslant i \leqslant \nu - 1$ попарно не зависимы и их распределения не зависят от числа состояний ν. Причем

$$X^*_{e_i} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e_i}{\gamma_i}\, w,$$

где w имеет χ^2-распределение с двумя степенями свободы. Сделанное утверждение непосредственно вытекает из (4).

г) Если (3), (4) справедливы для всех $\nu \leqslant n-1$, то они справедливы и для $\nu = n$. Действительно, при $\nu = n$, согласно в), процесс

$$e_0 \underset{\gamma_0}{\to} e_1 \underset{\gamma_1}{\to} \cdots \underset{\gamma_{n-1}}{\to} e_n$$

может быть разбит на два независимых подпроцесса: на подпроцесс

$$e_1 \underset{\gamma_1}{\to} e_2 - e_n \underset{\gamma_2}{\to} \cdots \underset{\gamma_{n-2}}{\to} e_{n-1} - e_n \underset{\gamma_{n-1}}{\to} e = 0$$

в предположении $e_1 = 0$, и подпроцесс

$$e_0 \underset{=e_1}{\to} e_1 \underset{\gamma_{n-1}}{\to} e_n$$

в предположении $e_0 = 0$. Отсюда, учитывая доказанное в пп. б), в), убеждаемся в справедливости (3), (4) для $\nu = n$.

д) Поскольку (3), (4) справедливы для $\nu = 1, 2$, то они справедливы, согласно п. и для всех ν. Формула (4) легко обобщается на случай, когда $e_0 > 0$. При этом

$$X^* = X_{\text{н}} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\nu-1}\left(\frac{e_\nu}{\gamma_i} - \frac{e_i}{\gamma_i}\right)\cdot X_{i+1}.$$

Распределение числа X, задаваемое формулами (4), (5), имеет большое число параметро и при обработке опытных данных является неудобным. Однако, если порядок величи $(e_\nu - e_i)/\gamma_i$ у многих слагаемых примерно одинаков, то вместо (4), (5) можно испол зовать равенство

$$X^* = u + \alpha \cdot v,$$

где u, v — независимые случайные величины, α — параметр. Случайная величина u име ет нормальное распределение с параметрами (a, σ^2); случайная величина v имеет χ распределение с двумя степенями свободы.

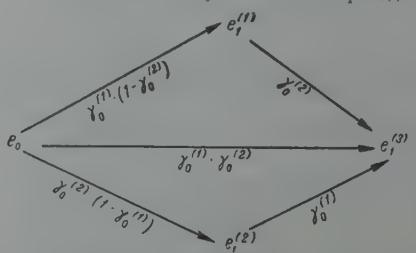
4. Приложения обобщенной схемы. Обобщенная схема с известной идеализацие отражает воздействие как стационарной, так и нестационарной причин. В частности, пр действии нестационарной причины величины e_i, $i = \overline{1, \nu}$ будут включать в себя посл довательности нулей, длиной, равной числу k, необходимых для наступления разладк изменений в состоянии объекта. Предположение о независимости γ_i, e_i от номера парти означает стабильность процесса изготовления изделий. Если, например, процесс изгото вления находится в стадии освоения, то при переходе от первых партий к последу щим величины γ_i будут иметь тенденцию к уменьшению. Каждое следующее измен ние ξ_t зависит только от того, в каком состоянии находились инструменты, приспосо ления, станок и их настройка в предыдущий момент времени, т. е. фактически от того каково было предыдущее значение ξ_t. При этом ξ_t может пробегать либо ограниченны ряд дискретных значений, либо представлять собой кусочно непрерывную случайну функцию. Последнее наблюдается при возникновении дефектов вследствие постепенно износа формообразующего инструмента. Точками разрыва случайной функции буду моменты наладок процесса изготовления изделий. В любом случае область [0, 1] измене ния ξ_t может быть разбита на достаточное число l отрезков, внутри которых величин ξ_t можно считать постоянной. Соответственно получим ξ_t возможных значений

$$e_0, e_1, \ldots, e_l. \qquad (7$$

Множество (7) задает возможные состояния цепи Маркова и им отвечают соответст вующие вероятности p_{ij} перехода. В указанную схему укладываются самые различны практические случаи, в том числе и случаи одновременного и независимого действи нескольких стационарных или нестационарных причин. В частности, если одновремен но и независимо друг от друга действуют две стационарные причины, каждая из которы действуя изолированно, давала бы простейшую схему

$$e_0 \xrightarrow[\gamma_0^{(1)})]{} e_1^{(1)}, \qquad e_0 \xrightarrow[\gamma_0^{(2)}]{} e_1^{(2)},$$

то при совместном их действии была бы получена схема переходов:



где $e_1^{(3)} = e_1^{(1)} + e_1^{(2)} - e_1^{(1)} \cdot e_1^{(2)}$.

Особенностью цепи Маркова с множеством состояний (7) является ограниченность числа переходов за время изготовления одной партии. Это объясняется двумя обстоятельствами. Число изменений величины ξ_t под влиянием наладок не может быть больше числа точек профилактического контроля, которое всегда (при $N \to \infty$) конечно. Между двумя наладками величина ξ_t не убывает и при достижении ею некоторого уровня дальнейшие повреждения, засорения и т. д. не оказывают влияния. Соответственно процесс изменения ξ_t, заданный на множестве состояний (7) как цепь Маркова, может быть представлен как ряд подпроцессов:

$$e'_0 \xrightarrow[\gamma'_0]{} e'_1 \xrightarrow[\gamma'_1]{} \dots \xrightarrow[\gamma'_{\nu-1}]{} e'_\nu, \tag{8}$$

где $e'_0, e'_1, \dots, e'_\nu$ принадлежит множеству (7), а $\gamma'_0, \gamma'_1, \dots, \gamma'_{\nu-1}$ — соответствующие им вероятности перехода. Для каждой реализации подпроцесса типа (8) может быть указана его вероятность

$$\mathbf{P}\{e'_0 \xrightarrow[\gamma'_0]{} e'_1 \xrightarrow[\gamma'_1]{} \dots \xrightarrow[\gamma'_{\nu-1}]{} e'_\nu\} = \alpha_j. \tag{9}$$

Согласно теореме п. 3, для подпроцесса (8) справедлива асимптотическая формула (3). Если $f_j(X^*)$ — распределение X^*, соответствующее подпроцессу (8), то распределение X^*, отвечающее всему множеству возможных подпроцессов, представится как

$$f(X^*) = \sum_j \alpha_j \cdot f_j(X^*).$$

Коэффициенты и число слагаемых в формуле (5) будут отвечать определенному подпроцессу (8). Но распределение числа X^*, заданное процессом

$$e_0 \xrightarrow[\gamma_0]{} e_1 \xrightarrow[\gamma_1]{} \dots \xrightarrow[\gamma_{\nu-1}]{} e_\nu,$$

не изменится при любой перестановке $e_0 \xrightarrow[\gamma_0]{}; e_1 \xrightarrow[\gamma_1]{}; \dots; e_{\nu-1} \xrightarrow[\gamma_{\nu-1}]{}$. Поэтому, если подпроцессы (8) отличаются друг от друга только перестановкой $e'_0 \xrightarrow[\gamma'_0]{}; \dots; e'_{\nu-1} \xrightarrow[\gamma'_{\nu-1}]{}$, то достаточным приближением для $f(X^*)$ будет распределение, задаваемое формулой (5). Следует добавить, что начальное состояние e'_0 задается настройкой процесса (наладкой). При жестких правилах наладок дисперсия величин e'_0 будет небольшой. Состояние e'_ν в подпроцессе (8) является поглощающим. При профилактическом контроле, осуществляемом в случайные моменты времени, для большинства подпроцессов e'_ν соответствует одному из начальных состояний. При отсутствии контроля или при относительно редко выполняемом контроле состояние e'_ν будет соответствовать практически достижимому верхнему уровню ξ_t.

Большие величины $(e_\nu - e_i)/\gamma_i$, резко выпадающие из всей совокупности коэффициентов в правой части формулы (5), будут, в основном, возникать под влиянием либо быстрого возрастания ξ_t, либо в силу долгого отсутствия наладок. Число подобных случаев и порядок таких величин для большинства подпроцессов, имеющих $\sum \alpha_j$, близкую к единице, будут примерно одинаковыми. Поэтому можно ожидать, что в стабильном состоянии для процессов изготовления изделий с относительно жесткими правилами наладки и профилактического контроля формула (6) дает удовлетворительное описание распределения $f(X^*)$. Параметры распределения $f(X^*)$ будут зависеть от состояния оборудования, оснастки и квалификации исполнителей. При этом, естественно, нельзя переоценивать универсальности указанного описания. Надо

также отметить, что вопрос четкой математической формулировки условий прил жимости (6) остается открытым. При слабом засорении, когда переход к непр рывному распределению является неоправданным, соответствующие распределения дол ны задаваться отдельно. Для стационарной причины удовлетворительное описание опы ных данных может быть получено на основе распределения, соответствующего произво дящей функции (4а). При действии нестационарной причины слабые засорения характерн когда вероятность возникновения двух или более разладок за время изготовления од ной партии, мала. В этом случае можно показать, что при $N \to \infty$ теоретическое ра пределение имеет вид:

$$P\{X=0\} = 1 - \frac{C}{1-B}, \quad P\{X=m\} = C \cdot B^{m-1}; \qquad m \geqslant 1. \tag{10}$$

Следует отметить, что распределение $f(X)$ целесообразно изучать для каждого вид дефекта в отдельности. Знание характера распределения $f(X)$ и анализ причин возник новения дефектов дают возможность качественной оценки эффективности приемочног контроля. В отдельных случаях на этой основе может быть выполнена количественна предварительная оценка результатов приемочного контроля.

Некоторый интерес представляет также оценка среднего выходного качества н основе задания моментов распределения $f(X)$. При контроле однократной выборкой допустимом числе дефектных единиц в выборке $c = 0$, такая оценка может быть полу чена, если известны моменты:

$$\nu_1 = \sum_X X \cdot f(X); \quad \nu_2 = \sum_X X^2 \cdot f(X).$$

Для получения оценки сверху достаточно при вычислении среднего выходного качеств заменить распределение $f(X)$ на распределение $f_E(X)$ такое, что

$$f_E(N) = p_1; \; f_E(X_E) = p_2; \; p_1 + p_2 = 1,$$

причем

$$\sum_X X \cdot f_E(X) = \nu_1, \; \sum_X X^2 \cdot f_E(X) = \nu_2.$$

Справедливость этой оценки следует из того, что при вычислении среднего выходног качества

$$\overline{Y}_c = \frac{\sum_X X \cdot P(X) \cdot f(X)}{\sum_X P(X) \cdot f(X)},$$

где $P(X)$ — вероятность приемки партии при числе дефектов, равном X, замена $f(X)$ н $f_E(X)$ равносильна замене объема выборки $n \geqslant 1$ на объем выборки $n = 1$.

Оценка среднего выходного качества снизу может быть получена за счет замен распределения $f(X)$ на распределение $f_0(X)$, где

$$f_0(0) = p_3; \; f_0(X_0) = p_4; \; p_3 + p_4 = 1,$$

причем

$$\sum_X X f_0(X) = \nu_1, \; \sum_X X^2 f_0(X) = \nu_2.$$

Указанная оценка является частным случаем некоторой общей оценки математиче ского ожидания выпуклой функции. А именно:

Определение. Пусть $\psi(X)$ — непрерывная, выпуклая снизу функция, заданна на $[0, D]$ и имеющая там непрерывные производные $\psi'(X)$, $\psi''(X)$. Пусть далее,

$$\psi_1(X) = aX^2 + bX + d$$

и $X_2 > X_1 > 0$ — любые фиксированные значения из $[0, D]$. Положим $\psi_1(0) = \psi(0)$ $\psi_1(X_1) = \psi(X_1)$, $\psi_1(X_2) = \psi(X_2)$ и будем говорить, что порядок выпуклости $\psi(X)$ на проме

утке $[0, D]$ не превосходит второй, если на промежутке $[X_1, X_2]$ имеет место нера-
нство

$$\psi(X) \geqslant \psi_1(X).$$

Теорема. *Если порядок выпуклости $\psi(X)$ не превосходит второй, то справедливо равенство:*

$$\left(1 - \frac{\nu_1^2}{\nu_2}\right) \cdot \psi(0) + \frac{\nu_1^2}{\nu_2} \cdot \psi\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \geqslant \sum_X \psi(X) \cdot f(X), \tag{11}$$

е

$$\sum_X f(X) = 1, \quad \nu_1 = \sum_X X \cdot f(X), \quad \nu_2 = \sum_X X^2 \cdot f(X); \quad X \in [0, D].$$

Доказательство непосредственно следует из того, что при $\psi(X) \equiv \psi_1(X)$ в (11) остигается равенство. Заметим также, что при $c = 0$, с известным приближением], вероятность приемки партии может быть представлена как $P(X) = \beta^X$, $0 < < \beta < 1$. Функция $P(X)$ здесь выпуклая снизу с порядком выпуклости менее второго.

Основным и наиболее удобным для практики средством по оценке эффективности риемочного контроля являются несмещенные оценки числа принятых дефектных изде-ий, разработанные А. Н. Колмогоровым и его учениками. Привлечение в качестве спомогательного средства анализа распределения $f(X)$ позволяет связать общие вопро-ы технологии производства с планированием выборочного приемочного контроля и оцен-ой его эффективности.

Поступила в редакцию
5.6.59.

ЛИТЕРАТУРА

1] А. Н. Колмогоров, Статический приемочный контроль при допустимом числе дефектных изделий равном нулю, Л., ЛДНТП, 1951.
2] Х. Б. Кордонский, Об одном случае распределения числа дефектных единиц в партиях изделий, Теория вероят. и ее примен., III, 3 (1958), 354—358.

THE DISTRIBUTION OF THE NUMBER OF DEFECTIVE HEMS IN LOTS

H. B. KORDONSKY (RIGA)

(Summary)

The distribution of the number of defective articles in lots is derived from an analysis of why the defects appeared.

A means is given for evaluating the average output quality of the produce after reception on the basis of the first two moments of the distribution of the number of defective articles in the lots.

О ПРИМЕНИМОСТИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ К СТАЦИОНАРНЫМ ПРОЦЕССАМ ПОСЛЕ ИХ ПРОХОЖДЕНИЯ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЙ ФИЛЬТР

Ю. А. РОЗАНОВ

Пусть $\xi(t)$ — стационарный в широком смысле случайный процесс, обладающий свойством сильного перемешивания, т. е

$$\sup_t \sup_{\substack{A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^t \\ B \in \mathfrak{M}_{t+\tau}^{\infty}}} |P(AB) - P(A)P(B)| = \alpha(\tau) \to 0, \tag{$*$}$$

при $\tau \to \infty$ (здесь $\mathfrak{M}_s^t$ — σ-алгебра, события вида $\{\xi(u) < x\}$, $s \leqslant u \leqslant t$). Наличие свойства $(*)$ делает возможным применение к интегральным средним значениям процесса

$\xi(t)$ центральной предельной теоремы [1]. Как известно [2], условие $(*)$ накладыва некоторые ограничения на спектральную плотность $f(\lambda)$ процесса $\xi(t)$, в частности, о должна быть положительна почти всюду. Часто же приходится иметь дело с процесс ми, у которых спектральная плотность обращается в нуль вне некоторого интервал например, после прохождения того же процесса $\xi(t)$ через линейный фильтр.

Оказывается, возможность применения центральной предельной теоремы сохраняе ся, если частотная характеристика фильтра достаточно гладкая.

Пусть

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, \Phi(d\lambda)$$

есть спектральное представление процесса $\xi(t)$, $\mathbf{M}\xi(t) = 0$,

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \varphi(\lambda)\, \Phi(d\lambda).$$

Положим

$$I(s, t) = \frac{1}{\sigma(s, t)} \int_{s}^{t} \eta(u)\, du,$$

где

$$\sigma^2(s, t) = \mathbf{D} \int_{s}^{t} \eta(u)\, du.$$

Теорема. *Пусть* $\sigma^2(s, t) \asymp t - s$ *при* $t - s \to \infty$, *а последняя производная* $\varphi^{(k)}$ (*функции* $\varphi(\lambda)$ *ограничена.*

Пусть $F^{s,t}(x)$ — *функция распределения случайной величины* $I(s, t)$. *Для того чтоб*

$$F^{s,t}(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du,$$

при $t - s \to \infty$ *равномерно по* s *и* t, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon >$ *нашлись бы числа* N_ε *и* T_ε *такие, что*

$$\int_{|x| > N_\varepsilon} x^2\, dF^{s,t}(x) \leqslant \varepsilon,$$

при $t - s \geqslant T_\varepsilon$.

Доказательство теоремы может быть выведено из общих результатов, доложенны автором на Всесоюзном совещании по теории вероятностей в г. Вильнюсе в 1960 г.

Поступила в редакцию
28.4.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Волконский, Ю. А. Розанов, Некоторые предельные теоремы для случай ных функций. I, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 2 (1959), 186—207.

[2] А. Н. Колмогоров, Ю. А. Розанов, Об условиях сильного перемешивания гау совского стационарного процесса, Теория вероят. и ее примен., **V**, 2 (1960), 222—22

ON THE APPLICABILITY OF THE CENTRAL LIMIT THEOREM TO STATIONAR PROCESSES PASSED THROUGH A LINEAR FILTER

Yu. A. ROZANOV (MOSCOW)

(Summary)

Let $\xi(t)$ be a stationary process with a «strongly mixing» property $(*)$.

We give the necessary and sufficient condition permitting the central limit theore to be applied to the process $\eta(t)$ (the output of a linear filter whose input is $\xi(t)$).

ОБ ЭНТРОПИИ АВТОМОРФИЗМА КОМПАКТНОЙ КОММУТАТИВНОЙ ГРУППЫ

В. А. РОХЛИН

Пусть X — компактная коммутативная группа и μ — инвариантная мера в X. В силу инственности инвариантной меры всякий автоморфизм T топологической группы X есть оморфизм пространства X с мерой μ в смысле теории меры (см. [1]). Следовательно, обладает определенной энтропией $h(T)$ в смысле Колмогорова — Синая [2] (см. так-мою обзорную статью [3]). Цель этой заметки — доказать, что если автоморфизм T годичен и группа X нетривиальна, то $h(T) > 0$. Короче: *всякий эргодический автоморфизм нетривиальной компактной коммутативной группы имеет положительную энтропию.*

Доказательство опирается только на следующие свойства энтропии автоморфизма:

A. Если T' — фактор-автоморфизм автоморфизма T, то $h(T') \leqslant h(T)$.

B. Если алгебра всех измеримых множеств пространства, в котором действует автоморфизм T, содержит такую подалгебру $\mathfrak{S}$, что $T\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}$ или $T\mathfrak{S} \supset \mathfrak{S}$ (строгие включения), то $h(T) > 0$.

C. Если T — эргодический автоморфизм конечномерного тора, то $h(T) > 0$.

Свойства A и B имеются в [3]. Свойство C — следствие формулы Я. Г. Синая [2], ражающей $h(T)$ через собственные значения целочисленной матрицы, задающей T в иклических координатах на торе. Согласно этой формуле

$$h(T) = \sum_{i=1}^{k} \lg |\lambda_i|, \qquad (*)$$

де $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — те собственные значения указанной матрицы, которые больше единицы по абсолютной величине (Синай [2] доказал формулу $(*)$ в предположении, что е собственные значения действительны и различны; на общий случай она была распространена Генисом [4]). То, что собственные значения, большие единицы по абсолютной величине, существуют, видно из следующих соображений. Так как произведение ех собственных значений равно определителю матрицы, т. е. ± 1, то собственных чений, больших единицы по абсолютной величине, может не быть только в случае, гда все собственные значения равны единице по абсолютной величине. Но тогда они ляются корнями из единицы (см., например, [5], стр. 126) и автоморфизм T не эргодичен (см. [1] или [6]).

Доказательство теоремы. Пусть G — (дискретная) группа характеров группы X, и U — автоморфизм группы G, сопряженный с T. Считая группу G аддитивной, возьмем в ней какой-нибудь элемент g, отличный от нуля, обозначим H подгруппу руппы G, порожденную полутраекторией

$$Ug,\ U^2g,\ U^3g, \ldots,$$

рассмотрим два случая: $g \in H$ и $g \overline{\in} H$.

Первый случай: $g \in H$. Пусть

$$g = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k U^k g,$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — целые числа, и пусть H' — подгруппа, порожденная элементами

$$Ug,\ U^2g, \ldots . U^rg.$$

Ясно, что $H' \supseteq U^{-1}H'$, т. е. $UH' \supseteq H'$. Рассмотрим две возможности: 1°. $UH' = H'$ и 2°. $UH' \supset H'$.

1°. $UH' = H'$. Из эргодичности автоморфизма T следует, что автоморфизм U апериодичен, т. е. что траектория

$$\ldots, U^{-1}f,\ f,\ Uf, \ldots$$

всякого ненулевого элемента $f \in G$ состоит из попарно различных элементов (см. [1] или [6]). Если f — элемент конечного порядка, лежащий в H', то его траектория также

состоит из элементов конечного порядка, лежащих в H'. Следовательно, если в H' им
ется ненулевой элемент конечного порядка, то таких элементов бесконечно много. Н
H' — группа с конечным числом образующих и потому содержит лишь конечное чис
элементов конечного порядка. Следовательно, в H' нет элементов конечного порядк
отличных от нуля.

Пусть X' — аннулятор подгруппы H' в X. Так как $UH' = H'$, то $TX' = X'$. След
вательно, T индуцирует в фактор-группе $X - X'$ некоторый фактор-автоморфизм T'. К
всякий фактор-автоморфизм эргодического автоморфизма, автоморфизм T' эргодичен. Та
как $X - X'$ есть группа характеров группы H', а H' есть свободная группа с конечны
числом образующих, то $X - X'$ — конечномерный тор. Таким образом T' — эрг
дический автоморфизм конечномерного тора, и согласно предложениям A и C

$$h(T) \geqslant h(T') > 0.$$

2°. $UH' \supset H'$. Пусть снова X' — аннулятор подгруппы H' в X, и пусть $\mathfrak{S}$ — алгеб
измеримых множеств, состоящих из целых смежных классов группы X по подгруп
X'. Из соотношения $UH' \supset H'$ следует, что $T\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}$, и согласно предложению
$h(T) > 0$.

Второй случай: $g \overline{\in} H$. Ясно, что $H \subseteq U^{-1}H$, и так как $g \in U^{-1}H$, но $g \overline{\in} H$,
$H \subset U^{-1}H$, т. е. $UH \subset H$. Пусть $\mathfrak{S}$ — алгебра измеримых множеств, состоящих из ц
лых смежных классов группы X по аннулятору подгруппы H в X. Из соотношени
$UH \subset H$ следует, что $T\mathfrak{S} \supset \mathfrak{S}$, и согласно предложению B $h(T) > 0$.

Поступила в редакцию
26.10.60

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Рохлин, Избранные вопросы метрической теории динамических систем, Усп
хи матем. наук, **4**, 2 (1949), 57—128.
[2] Я. Г. Синай, О понятии энтропии динамической системы, ДАН СССР, **124**, 4 (1959)
768—771.
[3] В. А. Рохлин, Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой, Ус
пехи матем. наук, **15**, 4 (1960), 3—26.
[4] А. Л. Генис, Метрические свойства автоморфизмов торов, ДАН СССР, **138**,
(1961), 991—993.
[5] Э. Гекке, Лекции по теории алгебраических чисел, М., ИЛ, 1940.
[6] П. Р. Халмош, Лекции по эргодической теории, М., ИЛ, 1959.

ON THE ENTROPY OF AUTOMORPHISM OF A COMMUTATIVE COMPACT GROU

V. A. ROHLIN (LENINGRAD)

(Summary)

The paper contains the proof of following theorem: every ergodic automorphism
a nontrivial compact Abelian group has a positive entropy.

КРАТКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА КРАМЕРА — РАО

О. В. ШАЛАЕВСКИЙ

Как известно, классическое соотношение, лежащее в основе теории эффективны
оценок многих параметров, было впервые и независимо друг от друга установлен
С. Рао [1] и Г. Крамером [2]. В настоящее время мы имеем несколько доказательст
однако все они излишне сложны и многословны. Между тем, это соотношение при те
предположениях, которые обычно делаются, является совершенно тривиальным [3]. Пр
ведем рассуждения из [3], используя матричную символику.

Пусть удовлетворяются обычные ограничения на функцию правдоподобия $L = L(x, \alpha)$ выборки $x^T = (x_1, \ldots, x_N)$ ($\alpha^T = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — параметрическая точка) и на несмещенные оценки $\alpha^{*T} = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$ (см., например, [4]) или выполняются какие-либо другие условия, гарантирующие возможность нижеследующих рассуждений.

Введем обозначения

$$K^T = \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_1}, \ldots, \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_n}\right); \quad \Phi = \mathbf{M}\{KK^T\}; \quad B = \mathbf{M}\{(\alpha^* - \alpha)(\alpha^* - \alpha)^T\},$$

где математическое ожидание от матрицы понимается как матрица, составленная из математических ожиданий элементов.

Имеет место неравенство Рао—Крамера, при одних допущениях в виде

$$B - \Phi^{-1} \geqslant 0 \tag{1}$$

и при других — в виде

$$\Phi - B^{-1} \geqslant 0, \tag{2}$$

символически означающее положительную определенность или полуопределенность матриц $B - \Phi^{-1}$ *и* $\Phi - B^{-1}$.

Заметим, что (1) и (2) формально эквивалентны, но интересно уметь доказывать каждое из них отдельно.

Доказательство. Дифференцируя соотношения $\int L\, d\omega = 1$ и $\int \alpha_i^* L\, d\omega = \alpha_i$, где $d\omega$ — элемент интегрирования, легко находим

$$\mathbf{M}\{(\alpha^* - \alpha) K^T\} = E \tag{3}$$

(E — единичная матрица). Далее, так как для любой матрицы A имеет место неравенство $AA^T \geqslant 0$, то

$$\mathbf{M}\{[\Phi^{-1}K - (\alpha^* - \alpha)][\Phi^{-1}K - (\alpha^* - \alpha)]^T\} \geqslant 0,$$

и

$$\mathbf{M}\{[K - B^{-1}(\alpha^* - \alpha)][K - B^{-1}(\alpha^* - \alpha)]^T\} \geqslant 0.$$

Раскрывая скобки и используя (3) и обозначения, указанные выше, немедленно получаем (1) и (2).

Поступила в редакцию
20.3.61

ЛИТЕРАТУРА

[1] C. R. Rao, Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters, Bull. Calcutta Math. Soc., 37 (1945), 81—91.

[2] H. Cramer, Contributions to the theory of statistical estimation, Skandinavisk Aktuarictidskrift, 29 (1946), 85—94.

[3] О. В. Шалаевский, Об эффективности оценок, полученных по методу наименьших квадратов (дипломная работа), ЛГУ, 1956.

[4] В. В. Петров, О методе наименьших квадратов и его экстремальных свойствах, Успехи матем. наук, IX, 1 (59), 41—62.

A SHORT PROOF OF THE KRAMER—RAO INEQUALITY

O. V. SHALAYEVSKY *(LENINGRAD)*

(Summary)

A simple proof of the Kramer — Rao inequality which may be regarded as a basis of the theory of efficient estimations is presented.

О КРИТЕРИЯХ СОГЛАСИЯ, ОСНОВАННЫХ НА ВЫБОРОЧНЫХ ПРОМЕЖУТКАХ

Д. М. ЧИБИСОВ

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с функцией распределения $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $F(1) = 1$. Обозначим $Y_0 = 0$, $Y_{n+1} Y_1 \leqslant Y_2 \leqslant \ldots \leqslant Y_n'$ наблюденные значения, расположенные в возрастающем порядке; $W_i = Y_i - Y_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots n+1$ и $Z^{(n)} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n+1})$, где $Z_1 \leqslant Z_2 \leqslant \ldots \leqslant Z_{n+1}$ — значения W_i в порядке возрастания. На $Z^{(n)}$ был основан ряд критериев для проверки нулевой гипотезы $F(x) = x$, использующих статистики вида: $\sum_{i=1}^{n+1} \left(Z_i - \frac{1}{n+1} \right)^2$, $\sum_{i=1}^{n+1} Z_i^2$, $\sum_{i=1}^{n+1} \left| Z_i - \frac{1}{n+1} \right|$ (см. [1, 2, 3]). Д. А. Дарлингом [4] был разработан общий метод нахождения распределений таких статистик при нулевой гипотезе. Особенно подробно критерии, основанные на $Z^{(n)}$ (в частности, на статистиках $\sum_{i=1}^{n+1} Z_i^r$ и $\max_i \{Z_i\}$), изучались в работах Вейсса [5]—[8]; им была исследована мощность таких критериев и доказана состоятельность для широкого класса альтернатив. В настоящей заметке доказывается, что асимптотическая эффективность критериев, основанных на $Z^{(n)}$, равна нулю.

Пусть $F(x) \neq x$ — некоторая функция распределения, и $F_\vartheta(x) = \vartheta F(x) + (1 - \vartheta) x$. Тогда функция мощности наиболее мощного критерия стремится к невырожденному пределу при $\vartheta \sqrt{n} = \text{const}$. Аналогичным свойством обладает критерий, если он имеет ненулевую асимптотическую эффективность. Кроме того, существуют критерии, имеющие ненулевую асимптотическую эффективность при широком классе альтернатив, например, функция мощности критерия Колмогорова, может быть оценена снизу функцией, зависящей только от $\lambda = \sqrt{n} \max_x |F_\vartheta(x) - x|$ и стремящейся к 1 при $\lambda \to \infty$ (это следует из [10]). Для критериев же, основанных на $Z^{(n)}$, как показывает доказываемая ниже теорема, альтернативы такого вида в пределе неотличимы от нулевой гипотезы.

Через $z^{(n)} = (z_1, \ldots, z_{n+1})$ мы будем обозначать точки, удовлетворяющие условиям $\sum_{i=1}^{n+1} z_i = 1$, $0 \leqslant z_1 \leqslant z_2 \leqslant \ldots \leqslant z_{n+1}$. В [5] показано, что если величины X_i имеют плотность вероятности $f(x)$, то совместная плотность величин $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n+1}$ равна

$$h(z^{(n)}) = n! \sum_p f(Z_{j(1)}) f(Z_{j(1)} + Z_{j(2)}) \ldots f(Z_{j(1)} + Z_{j(2)} + \ldots + Z_{j(n)}),$$

где $j(1), j(2), \ldots, j(n+1)$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n+1$ и $\sum_p$ обозначает суммирование по всем $(n+1)!$ таким перестановкам. Если $f(x) \equiv 1$, то $h(Z^{(n)}) = h_0(Z^{(n)}) \equiv n!\,(n+1)!$. В дальнейшем предполагается, что случайные величины $Z^{(n)}$ имеют распределение $\mathbf{P}^{(n)}\{\cdot\}$ с плотностью $h_0(z)^{(n)}$.

Теорема. *Пусть* $f_n(x) = 1 + \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n}}$, *причем* $\varphi(x)$ *имеет ограниченную на* $[0, 1]$ *вторую производную и* $\int_0^1 \varphi(x)\,dx = 0$. *Тогда отношение правдоподобия*

$$g_n(Z^{(n)}) \equiv \frac{h_n(Z^{(n)})}{h_0(Z^{(n)})} = \frac{n! \sum_p f_n(Z_{j(1)}) f_n(Z_{j(1)} + Z_{j(2)}) \ldots f_n(Z_{j(1)} + \ldots + Z_{j(n)})}{n!\,(n+1)!} \to 1$$

по вероятности при $n \to \infty$.

Обозначим $\alpha_r^{(n)}(Z^{(n)}) = (n+1)^{r-1}\sum_{i=1}^{n+1} Z_i^r$, где $r = 2, 3, \ldots$. Дарлингом ([4]) доказано, что

$$\frac{(n+1)^{r-1/2}\sum_{i=1}^{n+1} Z_i^r - \sqrt{n}\,\Gamma(r+1)}{\sqrt{\Gamma(2r+1) - (r^2+1)[\Gamma(r+1)]^2}}$$

распределена асимптотически нормально (0, 1). Отсюда следует, что $\alpha_r^{(n)} \to r!$ по вероятности. Для каждого m найдется $n_r(m)$ такое, что при $n \geqslant n_r(m)$ будут справедливы неравенства

$$\mathbf{P}^{(n)}\left\{\left|\alpha_r^{(n)}(Z^{(n)}) - r!\right| < \frac{1}{m}\right\} > 1 - \frac{1}{m}.$$

Обозначим $\varepsilon_{nr} = 1/m$ при $n_r(m) \leqslant n < n_r(m+1)$ и $A_{nr} = \left\{z^{(n)} : \left|\alpha_r^{(n)}(z^{(n)}) - r!\right| < \varepsilon_{nr}\right\}$. Тогда $\mathbf{P}^{(n)}\{A_{nr}\} > 1 - \varepsilon_{nr}$, причем $\varepsilon_{nr} \to 0$ монотонно при каждом r, когда $n \to \infty$. Выберем последовательность $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots$ так, чтобы $\sum_{j=1}^{r} \varepsilon_{n_r j} \to 0$ при $r \to \infty$. Для $n_r \leqslant n \leqslant n_{r+1}$ положим $B_n = \bigcap_{j=1}^{r} A_{nj}$. Тогда $\mathbf{P}^{(n)}\{B_n\} \to 1$ и для любой последовательности $z^{(n)} \in B_n$ $\alpha_r^{(n)}(z^{(n)}) \to r!$ при каждом r. В дальнейшем будут рассматриваться только точки $z^{(n)} \in B^{(n)}$ и будет показано, что $g_n(z^{(n)}) \to 1$ при $n \to \infty$ по любой последовательности таких точек (что равносильно равномерной сходимости на множествах $B^{(n)}$).

Заметим, что $r!$ есть r-й момент показательного распределения $F(x) = 1 - e^{-x}$ и если μ_r — центральные моменты этого распределения, то

$$\frac{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(z_i - \bar{z})^r}{\left[\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(z_i - \bar{z})^2\right]^{r/2}} \to \frac{\mu_r}{\mu_2^{r/2}}, \tag{1}$$

где $\bar{z} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} z_i \left(= \frac{1}{n+1}\right)$. Это соотношение будет использовано в дальнейшем.

Пусть $z^{(n)} = (z_1, \ldots, z_{n+1})$ — некоторая точка, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n+1})$ — $(n+1)$-мерная случайная величина, равная любой перестановке $(z_{j(1)}, z_{j(2)}, \ldots, z_{j(n+1)})$ с вероятностью $\frac{1}{(n+1)!}$ и $\xi_k = \sum_{i=1}^{k}\zeta_i - \frac{k}{n+1}$, $k = 1, \ldots, n+1$. Тогда $g_n(z^{(n)}) = \mathbf{M}\prod_{k=1}^{n} f_n\left(\frac{k}{n+1} + \xi_k\right)$.

Легко подсчитать, что $\mathbf{M}\xi_k = 0$, и при $k \leqslant l$ $\mathbf{M}\xi_k\xi_l = \frac{k(n+1-l)}{(n+1)^2 n}\left[\alpha_2^{(n)}(z^{(n)}) - 1\right]$.

Имеем:

$$T_n \equiv \ln\prod_{k=1}^{n} f_n\left(\frac{k}{n+1} + \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{k}{n+1} + \xi_k\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n+1} + \xi_k\right) - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\varphi^2\left(\frac{k}{n+1} + \xi_k\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi'\left(\frac{k}{n+1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \varphi'' -$$

$$- \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \varphi^2\left(\frac{k}{n+1}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi\varphi' + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Так как $\int_0^1 \varphi(t)\, dt = 0$, то

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[n \int_0^1 \varphi(t)\, dt + O(1) \right] = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Будем говорить, что последовательность $(h_{1n}, \ldots, h_{nn})$, $n = 1, 2, \ldots$ удовлетворяет условию W, если для любого $r = 3, 4, \ldots$

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (h_{in} - \bar{h}_n)^r}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (h_{in} - \bar{h}_n)^2 \right]^{r/2}} = O(1),$$

где $\bar{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_{in}$. Вальдом и Вольфовицем [9] была доказана следующая

Теорема. *Пусть* $(\zeta_{1n}, \ldots, \zeta_{nn})$ *с вероятностью* $1/n!$ *— любая перестановка чисел* $z_{1n}, \ldots, z_{nn}$, *и пусть* $L_n = d_{1n}\zeta_{1n} + \ldots + d_{nn}\zeta_{nn}$. *Тогда, если последовательности* $z_{1n}, \ldots, z_{nn}$ *и* $d_{1n}, \ldots, d_{nn}$ *удовлетворяют условию* W, *то* $(L_n - \mathbf{M}L_n)/\sqrt{\mathbf{D}L_n}$ *распределена асимптотически нормально* $(0,1)$.

Представим η_2 в виде

$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi'\left(\frac{k}{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{j=1}^{n+1} \zeta_j d_j - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{n+1} \varphi'\left(\frac{k}{n+1}\right) \right],$$

где $d_j = \sum_{k=j}^{n+1} \varphi'\left(\frac{k}{n+1}\right) = n\left[\varphi(1) - \varphi\left(\frac{j}{n+1}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$. По теореме Вальда и Вольфовица распределение η_2 сходится к нормальному, Выполнение условия W для $z_1, \ldots, z_{n+1}$ следует из (1), а для $d_1, \ldots, d_{n+1}$ из соотношения

$$\frac{\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} (d_j - \bar{d})^r}{\left[\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} (d_j - \bar{d})^2 \right]^{r/2}} \longrightarrow \frac{\int_0^1 \varphi^r(t)\, dt}{\left[\int_0^1 \varphi^2(t)\, dt \right]^{r/2}}.$$

Легко проверить, что $\mathbf{M}\eta_2 = 0$,

$$\mathbf{D}\eta_2 \to \sigma^2 = \int_0^1 \int_0^1 [\min(s, t) - st] \varphi'(s) \varphi'(t)\, ds\, dt = \int_0^1 \varphi^2(t)\, dt.$$

Величина $\eta_3 \to 0$ по вероятности, так как

$$\mathbf{M}|\eta_3| \leqslant \frac{\max|\varphi''|}{2\sqrt{n}} \mathbf{M} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 = \frac{\max|\varphi''|}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2 n} \left(\alpha_2^{(n)} - 1\right) \to 0.$$

алее,

$$\eta_4 = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\varphi^2\left(\frac{k}{n+1}\right) \to \mu = -\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi^2(t)\,dt,$$

$$\eta_5 = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\varphi\varphi' \to 0$$

о вероятности, так как $\mathbf{M}\eta_5 = 0$, $\mathbf{D}\eta_5 = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Таким образом, величина T_n распределена асимптотически нормально (μ, σ), причем $= -\sigma^2/2$. Из теоремы о сходимости производящих функций моментов следует, что $_n(z^{(n)}) \equiv \mathbf{M}e^{zT_n} \to e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = 1$. Теорема доказана.

Рассмотрим, в частности, два критерия.

1. $S_n = \sum_{i=1}^{n+1} Z_i^r$. При уровне значимости α гипотеза отвергается, если $S_n \geqslant C_n(\alpha)$.

Пусть $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ и u_α — корень уравнения $1 - \Phi(x) = \alpha$. Вейссом [6] ыло показано, что при $n \to \infty$

$$C_n(\alpha) \sim n^{-r+1/2}\left[\sqrt{n}\,\Gamma(r+1) + u_\alpha\sqrt{\Gamma(2r+1) - (r^2+1)\,\Gamma^2(r+1)}\,,\right] \qquad (2)$$

что если плотность равна $f(x)$, то функция мощности критерия равна асимптотически

$$1-\Phi\left(\frac{n^{r-1/2}C_n(\alpha) - \sqrt{n}\,\Gamma(r+1)\int_0^1 f^{1-r}(x)\,dx}{\sqrt{[\Gamma(2r+1) - 2r\Gamma^2(r+1)]\int_0^1 f^{1-2r}(x)\,dx - \left[(r-1)\,\Gamma(r+1)\int_0^1 f^{1-r}(x)\,dx\right]^2}}\right). \qquad (3)$$

Рассмотрим последовательность альтернатив $f_n(x) = 1 + \vartheta_n\varphi(x)$. Из (2) и (3) следует, что функция мощности стремится к невырожденному пределу, если

$$\sqrt{n}\left[\int_0^1 f_n^{1-r}(x)\,dx - 1\right] \to \text{const}.$$

Но $\int_0^1 f_n^{1-r}(x)\,dx = 1 + (1-r)\,\vartheta_n\int_0^1\varphi(x)\,dx - \frac{r(1-r)}{2}\,\vartheta_n^2\int_0^1\varphi^2(x)\,dx + O\left(\vartheta_n^3\right)$,

и так как $\int_0^1 \varphi(x)\,dx = 0$, то для различения альтернатив необходимо $n^{1/4}\vartheta_n \geqslant \text{const}$.

2. $V_n = \max_i\{Z_i\}$. Вейссом [8] было доказано, что этот критерий состоятельный и допустимый, т. е. не существует критерия, который имел бы большую мощность равномерно при любой альтернативе. Дарлингом [4] получено асимптотическое распределение V_n при нулевой гипотезе $f(x) = 1$:

$$\mathbf{P}^{(n)}\left\{V_n < \frac{\ln(n+1) - \ln v}{n+1}\right\} \to e^{-v}.$$

Обозначим $v_\alpha = -\ln(1-\alpha)$; при уровне значимости α гипотеза отвергается, если $V_n > \frac{\ln(n+1) - \ln v_\alpha}{n+1}$. Пусть $f_n(x) = 1 + \vartheta_n\varphi(x)$. Предположим, что $\varphi(x)$ непрерывна

на $[0,1]$ и $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$. Если X_i распределены равномерно, то $X_i' = F_n^{-1}(X_i)$ име-

ют плотность $f_n(x)$. Пусть $V_n' = \max_i \left(Y_i' - Y_{i-1}'\right) = \max_i \left[F_n^{-1}\left(Y_i\right) - F_n^{-1}\left(Y_{i-1}\right)\right]$. Оче-

видно, $V_n' \leqslant \dfrac{V_n}{\min\limits_x f_n(x)} = \dfrac{V_n}{1-\vartheta_n\varphi_0}$, где $\varphi_0 = -\min\limits_x \varphi(x)$. Поэтому

$$\mathbf{P}^{(n)}\left\{V_n' > \frac{\ln(n+1) - \ln v_\alpha}{n+1}\right\} \leqslant \mathbf{P}^{(n)}\left\{\frac{V_n}{1-\vartheta_n\varphi_0} > \frac{\ln(n+1) - \ln v_\alpha}{n+1}\right\} =$$

$$= \mathbf{P}^{(n)}\left\{V_n > \frac{\ln(n+1) - \vartheta_n\varphi_0 \ln(n+1) - \ln v_\alpha^{1-\vartheta_n\varphi_0}}{n+1}\right\}$$

и при $\vartheta_n = O\left(\dfrac{1}{\ln(n+1)}\right)$ функция мощности критерия стремится к α.

Поступила в редакцию
13.4.61

ЛИТЕРАТУРА

[1] B. F. Kimball, Some basic theorems for developing tests of fit for the case of the non-parametric probability distribution function, I, Ann. of Math. Stat., **18**, 4 (1947), 540—548.
[2] P. A. P. Moran, The random division of an interval, J. Roy. Stat Soc., Suppl., 9 (1947), 92—98.
[3] B. Sherman, A random variable related to the spacing of sample values, Ann. of Math. Stat., **21**, 3 (1950), 339—361.
[4] D. A. Darling, On a class of problems related to the random division of an interval Ann. of Math. Stat., **24**, 2 (1953), 239—253.
[5] L. Weiss, A certain class of tests of fit, Ann. of Math. Stat., **27**, 4 (1956), 1165—1170.
[6] L. Weiss, The asymptotic power of certain tests of fit based on sample spacings Ann. of Math. Stat., **28**, 3 (1957), 783—786.
[7] L. Weiss, The limiting joint distribution of the largest and smallest sample spacings Ann. of Math. Stat., **30**, 2 (1959), 590—592.
[8] L. Weiss, A test of fit based on the largest sample spacing, J. Soc. Industr. and Appl. Math., **8**, 2 (1960), 295—299.
[9] A. Wald, J. Wolfowitz, Statistical tests based on permutations of the observations, Ann. of Math. Stat., **15**, 4 (1944), 358—372.
[10] Z. W. Birnbaum, On the power of a one-sided test of fit for continuous probability functions, Ann. of Math. Stat., **24**, 3 (1953), 484—489.

ON THE TESTS OF FIT BASED ON SAMPLE SPACINGS

D. M. CHIBISOV *(MOSCOW)*

(Summary)

It is proved that the asymptotic efficiency of tests of fit based on sample spacings is zero.

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, СДЕЛАННЫХ НА ЗАСЕДАНИЯХ СЕМИНАРА КАФЕДРЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

SUMMARY OF PAPERS PRESENTED AT THE PROBABILITY RESEARCH SEMINAR, MOSCOW UNIVERSITY

Заседание 19 октября 1960 г.

Королюк В. С. (Киев), **О методе построения асимптотических разложений** (Koroljuk V. S. (Kiew), On a Method for Constructing Asymptotic Expansions).

1. В настоящем докладе излагается алгоритм построения асимптотических разложений для достаточно гладких функционалов от нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $P(x)$, имеющей конечные моменты достаточно высокого порядка.

2. Исходным пунктом в алгоритме служит граничная задача для интегрального уравнения с малым параметром $\varepsilon = 1/\sqrt{n}$, которое в пределе при $\varepsilon \to 0$ превращается в дифференциальное уравнение эллиптического или параболического типа. В первой проблеме диффузии (по терминологии А. Я. Хинчина [1]) задача ставится следующим образом: рассматриваемый функционал $u_\varepsilon(t, x; f)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u_\varepsilon(t, x + \varepsilon y)\, d\mathcal{P}(y) - u_\varepsilon(t - \varepsilon^2, x) = 0 \qquad (1)$$

с условиями

$$u_\varepsilon(1, x; f) = f(x), \quad x \in [a_-, a_+]; \qquad (2)$$

$$u_\varepsilon(t, x; f) = 0, \quad x \in (a_-, a_+), \quad 0 \leqslant t < 1.$$

Здесь $f(x)$ — достаточно гладкая функция, обращающаяся в нуль вместе со своими производными на концах отрезка $[a_-, a_+]$; искомый функционал $u_\varepsilon(t, x; f)$ является математическим ожиданием значения $f(s_n)$ в схеме блуждания, определяемой последовательными суммами $s_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^{k} \xi_r \; (k = 1, 2, \ldots, n)$ при условии, что $s_{[nt]} = x$.

Во второй проблеме диффузии (см. А. Я. Хинчин [1]) исходным является интегральное уравнение на отрезке $[a_-, a_+]$

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u_\varepsilon(x + \varepsilon y)\, d\mathcal{P}(y) - u_\varepsilon(x) = 0, \qquad (3)$$

с заданными условиями $u_\varepsilon(x; \varphi) = \varphi(x)$, $x \overline{\in} (a_-, a_+)$. Здесь $u_\varepsilon(x; \varphi)$ — математическое ожидание значения функции $\varphi(x)$ в точке первого выхода из интервала (a_-, a_+) с началом блуждания в точке $x \in (a_-, a_+)$.

3. Как известно (см., например, А. Я. Хинчин [1]), в пределе при $\varepsilon \to 0$ (т. е. $n \to \infty$) решения сформулированных выше задач для интегральных уравнений (1) и (3) стремятся к соответствующим решениям граничных задач для дифференциальных уравнений параболического и эллиптического типа.

При этом происходит вырождение граничных условий, так как граничные условия для интегральных уравнений (1) и (3) задаются вне области, в которой рассматривается искомый функционал, а условия для предельных дифференциальных уравнений определяются лишь на границе рассматриваемой области. Мы приходим, таким образом, к ситуации, аналогичной той, которая имеет место при асимптотическом анализе граничных

задач для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Для таких задач М. И. Вишик и Л. А. Люстерник [2] создали простой и эффективный метод построения асимптотических разложений, показав, что при вырождении граничных условий возникает явление так называемого пограничного эффекта. В рассматриваемых нами схемах блуждания пограничный эффект возникает в связи с возможностью перескока через границу области.

4. Общей идеей асимптотических методов решения уравнений, зависящих от малого параметра, является такое расщепление оператора P_ε, определяющего исходное уравнение *

$$P_\varepsilon u_\varepsilon = 0, \tag{4}$$

которое для искомого решения u_ε обеспечивает рекуррентный процесс построения приближенного выражения в виде асимптотического ряда

$$u_\varepsilon \approx \sum_{k=0} \varepsilon^k u_k. \tag{5}$$

Расщепление исходного оператора строится на классе бесконечно дифференцируемых функций с применением формулы Тейлора

$$\varepsilon^{-2} P_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \dots \tag{6}$$

и решение ищется в виде ряда (5). Подставляя эти ряды в исходное уравнение (4) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную систему уравнений для членов разложения

$$L_0 u_0 = 0,$$

$$L_0 u_k = -\sum_{r=0}^{k-1} L_{k-r} u_r, \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{7}$$

Этот метод хорошо известен и широко применяется при изучении асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений с малым параметром. В теоретико-вероятностных задачах этот метод был применен, по-видимому, впервые И. И. Гихманом [3] для асимптотического анализа математического ожидания достаточно гладких функций от сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова. Регулярные члены асимптотики, определяемые рекуррентным процессом (7), исчерпывают невязки, которые создаются предыдущими членами разложения при подстановке их в исходное уравнение (4). При этом регулярные члены асимптотики продолжаются вне рассматриваемой области непрерывно-дифференцируемым образом. При наших предположениях можно показать, что все решения уравнений (7) являются достаточно гладкими.

5. Непрерывно-дифференцируемое продолжение регулярных членов создает невязки в выполнении исходных граничных условий. Для компенсации этих невязок строятся члены асимптотики типа пограничного слоя (см. [2]). Построение пограничных слоев осуществляется вторым рекуррентным процессом, исходя из другого расщепления исходного оператора P_ε вблизи границы области:

$$P_\varepsilon = P_0 + \varepsilon P_1 + \dots, \tag{8}$$

где P_0 — интегральный оператор. Пограничные слои $V(z)$ определяются, как исчезающие достаточно быстро на бесконечности решения интегральных уравнений на полуоси $z \geqslant 0$

$$P_0 V_0 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} V_0(z+s)\, d\mathcal{P}_0(s) - V_0(z) = 0; \tag{9}$$

$$P_0 V_k = -\sum_{r=1}^{k} \mathcal{P}_r V_{k-r}, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

с заданными значениями при $z < 0$.

Существование таких решений обеспечивается наличием достаточного числа моментов у исходного распределения.

* В дальнейшем для простоты изложения имеется в виду уравнение (3).

6. Граничные условия для пограничных слоев $V_k^-(r)$ вблизи границы $x = a_-$ определяются таким образом, чтобы невязка исходных граничных условий при $x < a_-$ для разложения

$$W_N^-(x) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_k(x) + \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^{k+1} V_k^-\left(\frac{x-a_-}{\varepsilon}\right) \tag{10}$$

была порядка $O(\varepsilon^{N+1})$. При этом граничные условия для регулярных членов выбираются так, чтобы они компенсировали невязки пограничных слоев, а именно:

$$u_k(a_-) = -V_{k-1}^-(0). \tag{11}$$

Применение формулы Тейлора дает для пограничных слоев граничные условия при $z < 0$

$$V_k^-(z) = V_k^-(0) - \sum_{r=1}^{k+1} \frac{z^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial x^r} [u_{k+1-r}(a_-)]. \tag{12}$$

Аналогично вводятся пограничные слои $V_k^+\left(\frac{x-a_+}{\varepsilon}\right)$ на правой границе $x = a_+$. Таким образом, мы приходим к асимптотическому представлению искомого решения в виде:

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_k(x) + \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^{k+1} \left[V_\varepsilon^-\left(\frac{x-a_-}{\varepsilon}\right) + V_k^+\left(\frac{x-a_+}{\varepsilon}\right)\right] + z_\varepsilon(x). \tag{13}$$

7. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что изложенный алгоритм приводит для остаточного члена $z_\varepsilon(x)$ к уравнению

$$\varepsilon^{-2} P_\varepsilon z_\varepsilon = \varepsilon^{N+1} g \tag{14}$$

с ограниченной функцией g и граничными условиями вне (a_-, a_+) порядка $O(\varepsilon^{N+1})$. Отсюда методом верхних и нижних функций можно заключить, что

$$z_\varepsilon = O(\varepsilon^{N+1}) \tag{15}$$

и тем самым обосновать асимптотическое представление (13).

8. Пограничные слои из уравнений (9) могут быть определены методом факторизации (см. М. Г. Крейн [4]).

Пусть $\rho_0(\lambda)$ — преобразование Фурье ядра $\mathscr{P}_0(z)$

$$\rho_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda z}\, d\mathscr{P}_0(z).$$

Тогда имеет место факторизация

$$\rho_0(\lambda) - 1 = \lambda^2 \rho_+(\lambda)\, \rho_-(\lambda), \tag{16}$$

где $\rho_+(\lambda)$ и $\rho_-(\lambda)$ —функции, аналитические в верхней и нижней полуплоскости соответственно, так что

$$\rho_+(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{i\lambda z} p_+(z)\, dz;\ \rho_-(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda z} p_-(z)\, dz.$$

Уравнения (9) для однородных пограничных слоев можно теперь переписать в виде

$$\int_0^{+\infty} p_\pm(s)\, V_0^\pm(z \pm s)\, ds = 0. \tag{17}$$

Неоднородные пограничные слои из уравнений (9) определяются в виде суммы

$$V_k^-(z) = V_{k0}^-(z) + \int_z^{\infty} (s - z)\, W_k^-(s)\, ds. \tag{18}$$

Здесь $W_k^-(z)$ — решение неоднородного интегрального уравнения на полуоси $z \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(s-z)\, W_k^-(s)\, ds = \varphi_k^-(z), \tag{19}$$

равное нулю при $z < 0$, $\varphi_k^-(z)$ — правая часть уравнения (9), и

$$\rho_0(\lambda) - 1 = \lambda^2 \rho_1(\lambda) = \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} p_1(z)\, dz; \tag{20}$$

$V_{k0}^-(z)$ — однородный пограничный слой, определяемый из уравнения (17) с условиями при $z < 0$

$$V_{k0}^-(z) = V_k^-(z) - \int_0^{\infty} (s-z)\, W_k^-(s)\, ds. \tag{21}$$

9. Замечания. Так как пограничные слои при $\varepsilon \to 0$ существенно отличны от нуля лишь вблизи границы рассматриваемой области, то внутри области асимптотика искомого функционала определяется лишь регулярными членами разложения. Можно показать, что при определении регулярных членов асимптотики имеется возможность исключить задачу определения пограничных слоев (см. [4], [5]). Изложенный алгоритм с соответствующими дополнениями и изменениями (см. [2], [5, 6]) может быть применен в марковской и в двумерной схемах блуждания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Асимптотические законы теории вероятностей, М., ОНТИ, 1936.
[2] М. И. Вишик и Л. А. Люстерник, Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, Успехи матем. наук, **12**, 5 (1957), 3—122.
[3] И. И. Гихман, Об одной асимптотической теореме для сумм малых случайных слагаемых, Тр. инст. Матем. и Мех. АН УзССР, в 10, ч. I (1953), 36—43.
[4] М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, Успехи матем. наук, **13**, 5 (1958), 3—121.
[5] В. С. Королюк, Асимптотичний аналіз імовірності вбирання в одномірній схемі випадкових блукань з решітчастим розподілом імовірностей переходу, ДАН УРСР, 7 (1959), 702—706.
[6] В. С. Королюк, Об асимптотике некоторых функционалов в двумерной схеме блуждания, ДАН СССР, **135**, 3 (1960), 520—523.

Каменкович В. М., Об одной задаче теории морских течений (Kamenkovič V. M., On a Problem in the Theory of Ocean Currents).

Докладчик изложил содержание работы [1], цитируемой в следующем далее докладе Р. З. Хасьминского, подчеркнув, что теоремы Хасьминского (см. следующий доклад) дают строгое обоснование выводов этой работы.

Хасьминский Р. З., О некоторых предельных теоремах для диффузионных процессов с малой диффузией (Hasminsky R. Z., On Some Limit Theorems for Diffusion Processes with Small Diffusion).

1. Рассмотрим динамическую систему в кольце K между двумя концентрическими окружностями C_1 и C_2 (радиусов r_1 и r_2 соответственно). Пусть движение точки в этой

инамической системе состоит просто во вращении с единичной угловой скоростью по ответствующей окружности, определяемой начальными условиями и концентричной с $_1$ и C_2 (к этому случаю можно преобразованием координат прийти от общего случая вижения по замкнутым траекториям). При наложении на это движение малого диффу-ионного процесса получается марковский процесс в K, который характеризуется эллип-ическим оператором

$$\varepsilon L + \frac{\partial}{\partial \varphi} = \varepsilon \left[a_{11}(r,\ \varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2a_{12}(r,\ \varphi) \frac{\partial^2}{\partial r\, \partial \varphi} + \right.$$

$$\left. + a_{22}(r,\ \varphi) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + b_1(r,\ \varphi) \frac{\partial}{\partial r} + b_2(r,\ \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

ы интересуемся предельным поведением математического ожидания некоторых функ-ионалов от этого процесса при $\varepsilon \to 0$.

Будем обозначать $x = (r, \varphi)$ точку из K и для любой функции $Z(x)$ положим

$$\overline{Z}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(r, \varphi)\, d\varphi.$$

бозначим τ_ε момент первого достижения границы траекторией $[r(t, \omega), \varphi(t, \omega)] = X(t)$ процесса (зависимость $X(t)$ от ω в дальнейшем не будет выписываться явно). дается доказать следующую теорему ($\mathbf{M}_x \xi$ означает математическое ожидание ξ при словии, что $X(0) = x$).

Теорема 1. *Пусть $F(r, \varphi)$ — произвольная непрерывная в $K \cup C_1 \cup C_2$ функция, а оэффициенты a_{ij} и b_i дважды непрерывно-дифференцируемы. Тогда*

1. *Функция $u_\varepsilon(x) = P_x\{X_{\tau_\varepsilon} \in C_2\}$ стремится к пределу $u_0(r)$ при $\varepsilon \to 0$, причем $u_0(r)$ довлетворяет уравнению*

$$\overline{a}_{11}(r) \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \overline{b}_1(r) \frac{du_0}{dr} = 0$$

граничными условиям $u_0(r_1) = 0$ и $u_0(r_2) = 1$.

2. *Характеристическая функция $V_\varepsilon(x)$ случайной величины $\varepsilon \int_0^{\tau_\varepsilon} F(X_t)\, dt$, стреми-ся при $\varepsilon \to 0$ к пределу $V_0(r)$, который является единственным решением дифферен-иального уравнения*

$$\overline{a}_{11}(r) \frac{d^2 V_0}{dr^2} + \overline{b}_1(r) \frac{dV_0}{dr} - is\overline{F}(r)\, V_0 = 0,$$

ри условиях $V_0|_{C_i} = 1$.

3. *Плотность предельного распределения ($\varepsilon \to 0$) точки X_{τ_ε} выхода на C_i при усло-ии, что выход происходит на C_i, есть*

$$\frac{a_{11}(r_i, \varphi)}{\int_0^{2\pi} a_{11}(r_i, \varphi)\, d\varphi}.$$

Для доказательства этой теоремы используется обычный аппарат, применяемый при сследовании предельного поведения решения краевых задач для эллиптических диффе-енциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Однако и в при-енении к дифференциальным уравнениям теорема 1 дает новый результат, который ормулируется так:

Теорема 1′. *При сделанных предположениях относительно коэффициентов решение*

u_ε *уравнения*, $(c(r, \varphi) \geqslant 0)$,

$$Lu_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \varphi} - c(r, \varphi)\, u_\varepsilon = F(r, \varphi)$$

с граничными условиями $u_\varepsilon|_{C_i} = f_i(\varphi)$ *стремится при* $\varepsilon \to 0$ *к решению уравнения*

$$\overline{a}_{11}(r)\frac{d^2u_0}{dr^2} + \overline{b}_1(r)\frac{du_0}{dr} - \overline{c}(r)\, u_0 = \overline{F}(r),$$

принимающему граничные значения

$$u_0|_{C_i} = \frac{\int_0^{2\pi} f_i(\varphi)\, a_{11}(r_i, \varphi)\, d\varphi}{\int_0^{2\pi} a_{11}(r_i, \varphi)\, d\varphi},$$

причем это стремление равномерно в замыкании любой подобласти K, *не содержащей точек из* C_i.

2. Результаты предыдущего пункта оказываются полезными при исследовании некоторых вопросов в гидромеханике, как это следует, в частности, из доклада Каменковича (см. также [1], где частный случай теоремы 1 был получен нестрого). Кроме того эти результаты могут быть полезны при исследовании перехода инвариантной меры μ марковского процесса в инвариантную меру предельной динамической системы. Рассмотрим для простоты марковский процесс $X_1(t)$, $X_2(t)$ на двумерном торе, определяемый системой:

$$dX_1 = \frac{\lambda}{F(X_1(t), X_2(t))}\, dt + \varepsilon\, d\xi_1(t),$$

$$dX_2 = \frac{1}{F(X_1(t), X_2(t))}\, dt + \varepsilon\, d\xi_2(t),$$

где $(\xi_1(t)\ \xi_2(t)) = X(t)$ — марковский процесс на торе, описываемый оператором

$$L = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x_1, x_2)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i+1}^{2} b_i(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}$$

(x_1 и x_2 — координаты на торе, т. е. действительные числа, рассматриваемые по модулю 1). В случае иррационального λ предельная динамическая система имеет единственную инвариантную меру μ_0 и нетрудно показать, что $\mu_\varepsilon \to \mu_0$ (слабо). В случае же рационального λ предельная динамическая система имеет бесчисленное множество инвариантных мер (распадается на замкнутые траектории) и представляет интерес ответ на вопрос о том, к какой из них будет стремиться μ_ε. С помощью теоремы 1 удается показать, что стремление будет к такой мере, которая вдоль каждой замкнутой траектории распределена с плотностью $F(x, y)$, а для решения вопроса о «массе», приходящейся на каждую траекторию, нужно решать соответствующее уравнение в ортогональном к этим траекториям направлении с усредненными, как и в п. 1, коэффициентами. Этот результат высказывался ранее А. Н. Колмогоровым в виде гипотезы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Каменкович, К вопросу о влиянии рельефа дна на антарктическое циркумполярное течение, ДАН СССР, **134**, 5 (1960), 1076—1078.

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, СДЕЛАННЫХ НА ЗАСЕДАНИЯХ СЕКЦИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

(ноябрь — декабрь 1960 г.)

SUMMARY OF PAPERS PRESENTED AT THE SESSIONS OF THE PROBABILITY AND STATISTICS SECTION OF THE MOSCOW MATHEMATICAL SOCIETY

(November—December, 1960)

Заседание 16 ноября.

Пинскер М. С., Об асимптотических свойствах распределений квадратичных функционалов гауссовских случайных процессов (Pinsker M. S., On Asymptotic Properties of Distributions for Quadratic Functionals of Gaussian Stochastic Processes).

1. Пусть $\xi = \{\xi(t)\}$ — гауссовский случайный процесс с $\mathbf{M}\xi(t) = 0$, и пусть $\zeta(T) = \int_0^T \xi^2(t)\,dt$. Тогда, как известно, с вероятностью единица

$$\zeta(T) = \sum_j \nu_j(T)\,\xi_j^2(T), \tag{1}$$

где $\xi_j^2(T)$ — независимые гауссовские случайные величины с параметрами (0,1). Имеет место следующее предложение:

Если процесс ξ стационарен и имеет рациональную спектральную плотность $f_\xi(\lambda)$, то

$$\pi_T(\lambda) = T\mu(f_\xi(\lambda) > \nu) + o(T), \tag{2}$$

где $\pi_T(\lambda)$ — число $\nu_j(T)$, больших ν, $\mu(\cdot)$ — мера Лебега.

2. Пусть $\xi = \{\xi(\cdot)\}$ и $\eta = \{\eta(\cdot)\}$ — гауссовские случайные процессы, и пусть ξ_S^T и η_S^T — случайные величины, образованные:

а) из случайных величин $\xi(t)$ и $\eta(t)$, $s \leqslant t \leqslant T$, соответственно, если ξ и η — необобщенные процессы;

б) из случайных величин $\xi(\varphi)$ и $\eta(\varphi)$, $\varphi(t) = 0$ при $t \in (S, T)$, соответственно, если ξ и η — обобщенные процессы.

Тогда, как известно (см. [1]), распределение случайных величин ξ_S^T, η_S^T или абсолютно непрерывно или сингулярно друг относительно друга.

В случае абсолютной непрерывности, полагая

$$h_{\xi_0^T \eta_0^T}(\cdot) = \log \frac{dP_{\xi_0^T}(\cdot)}{dP_{\eta_0^T}(\cdot)},$$

с вероятностью единица имеем:

$$h_{\xi_0^T \eta_0^T}(\xi_0^T) = \sum_j \left\{ \frac{1}{2}[\nu_j(T) - 1]\,\tilde{\xi}_j^2 - \frac{1}{2}\log \nu_t(T) \right\}, \tag{3}$$

где $\tilde{\xi}_j(T)$ — независимые гауссовские случайные величины с параметрами (0,1). Тогда:

Если процессы ξ и η стационарны и имеют рациональные спектральные плотности $f_\xi(\lambda)$ и $f_\zeta(\lambda)$, то

$$\pi_T(\lambda) = T\mu\left(\frac{f_\xi(\lambda)}{f_\eta(\lambda)} > \nu\right) + o(T), \tag{4}$$

где $\pi_T(\nu)$ и $\mu(\cdot)$ определяются точно так же, как и в формуле (2).

3. Пусть $\xi = \{\xi(\cdot)\}$ и $\eta = \{\eta(\cdot)\}$ образуют гауссовский случайный процесс (ξ, η). Тогда меры $P_{\xi_S^T \eta_S^T}$ и $P_{\xi_S^T} \times P_{\eta_S^T}$ или абсолютно непрерывны или сингулярны друг относительно друга; ξ_S^T и η_S^T определяются так же, как и в пункте 2.

В силу абсолютной непрерывности, полагая

$$i_{\xi_0^T \eta_0^T}(\cdot) = \log \frac{dP_{\xi_0^T \eta_0^T}(\cdot)}{dP_{\xi_0^T} \times P_{\eta_0^T}(\cdot)},$$

имеем, с вероятностью единица,

$$i_{\xi_0^T \eta_0^T}(\xi_0^T, \eta_0^T) = \sum_j \frac{1}{2}[\lambda_j(T)(\tilde{\xi}_j^2(T) - \tilde{\eta}_j^2(T)) - \log(1 - \lambda_j(0)) \quad (5)$$

где $\tilde{\xi}_j(T)$, $\tilde{\eta}_j(T)$ — независимые гауссовские случайные величины с параметрами $(0, 1)$. Тогда:

Если процессы ξ и η стационарны, стационарно-связаны и имеют рациональные спектральные и взаимные спектральные плотности $f_\xi(\lambda)$, $f_\eta(\lambda)$, $f_{\xi\eta}(\lambda)$ и $\int \log(1 - r_{\xi\eta}^2(\lambda))\, d\lambda < \infty$, причем $r_{\xi\eta}^2(\lambda) = |f_{\xi\eta}(\lambda)|^2 / f_\xi(\lambda) f_\eta(\lambda)$, то

$$\pi_T(\lambda) = T\mu(r_{\xi\eta}^2(\lambda) > \nu) + o(T), \quad (6)$$

где $\pi_T(\lambda)$ и $\mu(\cdot)$ определяются точно так же, как и в пунктах 1 и 2.

Замечание. Ради четкости и краткости формулировок мы ограничивались случаями рациональных спектральных плотностей, хотя, например, полученные формулы будут иметь место для любых регулярных по Колмогорову случайных процессов дискретного аргумента.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Гаек, Об одном свойстве нормальных распределений произвольного стохастического процесса, Чехосл. матем. журнал, 8 (83), (1958), 610—618.

Колмогоров А. Н., Замечание к докладу Пинскера М. С.

Естественно, что законы распределения квадратических функционалов от гауссовских процессов входят в класс K-распределений, предельных для распределений многочленов второй степени

$$\mathcal{P}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

от компонент n-мерных гауссовских векторов (n при предельном переходе, вообще говоря, переменное). Было бы интересно изучить основные качественные свойства распределений класса K.

Синай Я. Г., О предельных теоремах для стационарных процессов (Sinay Ya. G., On Limit Theorems for Stationary Processes)

Содержание доклада будет опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения».

Заседание 23 ноября.

Лезерсон В. К., Современные задачи теории телефонного сообщения (Lezerson V. K., Current Problem in Telephone Communication Theory).

Колмогоров А. Н., Замечание к докладу В. К. Лезерсона.

А. Н. Колмогоров отмечает привлекательность для математика общей постановки задачи о транспонированном включении. Число абонентских линий N, число соединительных путей V, доступность D и емкость каждого соединительного пути (вертикали) m связаны соотношением

$$V = \frac{ND}{m}.$$

Требуется указать схему присоединения абонентских линий к соединительным путям, удовлетворяющую условиям: а) каждая линия присоединяется к D путям, б) к каждому пути присоединено m линий, которая обращает в минимум

$$\overline{\mathbf{P}} = \max_i \mathbf{P}_i,$$

где $\mathbf{P}_i$—вероятность отказа абоненту i-ой линии *.

В ответ на вопрос А. Н. Колмогорова докладчик подтверждает, что во многих случаях техническое осуществление произвольной схемы присоединения указанного типа не представляет больших технических трудностей.

Рогозин Б. А., Одно замечание к распределению собственных значений форм Теплица (Rogozin B. A., A Remark on the Distribution of Eigenvalues of Toeplitz Forms).

Пусть даны две последовательности комплексных чисел $\{r_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\infty}$ и $\{\rho_\mu\}_{\mu=-\infty}^{\infty}$, причем обе они представлены в виде

$$r_\nu = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu x} f(x)\, dx \quad \text{и} \quad \rho_\mu = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\mu x} \varphi(x)\, dv,$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ принадлежат $L(-\pi, \pi)$. Целью настоящего замечания является доказательство следующего факта: *если m и M являются существенными нижней и верхней гранями $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и $\varphi(x)$ неотрицательна, а $\log \varphi(x) \in L(-\pi, \pi)$, и если $\pi(\lambda)$—число корней, уравнения*

$$\det \| \| r_{\nu-\mu} \| - \lambda \| \rho_{\nu-\mu} \| \| = 0 \quad \mu, \nu = 0, \ldots, n, \tag{1}$$

больших λ, то

$$\pi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \mu \left\{ \frac{f(x)}{\varphi(x)} > \lambda \right\} n + o(n)$$

во всех точках непрерывности функций

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \mu \left\{ \frac{f(x)}{\varphi(x)} > \lambda \right\}.$$

---

* С задачей можно ознакомиться по статье Б. С. Лившица «Пропускная способность схем транспонированного включения» в сборнике «Проблемы передачи информации», вып. 6 (1960), где, впрочем, отмечается желательность ограничения достаточно простыми схемами, если более сложные не дают значительного выигрыша.

Предположим, что $0 < m \leq \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \leq M$. Отметим, что для $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_{n+1}^{(n)}$ — корней уравнения (1) — имеет место соотношение

$$\lambda_1^{(n)} \ldots \lambda_{n+1}^{(n)} = \frac{\det \| \| r_{\nu-\mu} \| \|}{\det \| \| p_{\nu-\mu} \| \|}.$$

При наших допущениях относительно $f(x)$, $\varphi(x)$ без труда получаем из результатов [1] (см. 2.2, 3.1, 5.2), что

$$\lim_{n\to\infty} [\lambda_1^{(n)} \lambda_2^{(n)} \ldots \lambda_{n+1}^{(n)}]^{\frac{1}{n+1}} = \exp \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{f(x)}{\varphi(x)}\, dx.$$

Далее рассуждая как при доказательстве теоремы 5. 2 в [1], получаем требуемое.

Это замечание возникло под влиянием доклада М. С. Пинскера «Асимптотическое распределение квадратических функционалов от гауссовских процессов», сделанном на заседании секции теории вероятностей и математической статистики Московского Математического общества 16 ноября, в котором при нескольких других предположениях были получены более точные результаты, а именно

$$\pi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \mu \left\{ \frac{f(x)}{\varphi(x)} > \lambda \right\} n + o(n).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] U. Grenander G., Szegö, Toeplitz form and their applications, Univ. of California Press, 1958.

Севастьянов Б. А., Класс предельных законов распределения квадратичных форм от нормальных случайных величин (Sevastjanov B. A., A Class of Limit Distributions for Quadratic Forms from Normal Stochastic Quantities).

Решается следующая задача*. Пусть случайные векторы $(\widetilde{\xi}_1 \ldots, \widetilde{\xi}_n)$ распределены нормально со средними $\mathbf{M}\widetilde{\xi}_r = \widetilde{m}_r$, $r = 1, 2, \ldots, n$ и матрицей вторых моментов $R = \| b_{ij} \|$, $b_{ij} = \mathbf{M}(\widetilde{\xi}_i - \widetilde{m}_i)(\widetilde{\xi}_j - \widetilde{m}_j)$. Рассмотрим случайные величины

$$\widetilde{\zeta}_n = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \widetilde{\xi}_i \widetilde{\xi}_j \tag{1}$$

— квадратичные формы от $(\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_n)$. Обозначим K класс всех законов распределения, которые могут быть предельными для $\widetilde{\zeta}_n$ при $n \to \infty$, т. е. класс таких $F(x)$, что для некоторых последовательностей $Q_n = \| a_{ij}^{(n)} \|$, $R_n = \| b_{ij}^{(n)} \|$ и $(m_1^{(n)}, \ldots, m_n^{(n)})$ существуют такие $B_n \neq 0$ и $\widetilde{A}_n$, что

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{\widetilde{\zeta}_n - \widetilde{A}_n}{B_n} < x \right\} \Rightarrow F(x). \tag{2}$$

Задача состоит в том, чтобы описать все законы класса K. Ниже доказывается

* Эта задача поставлена А. Н. Колмогоровым (см. замечание к докладу от 16 ноября).

Теорема. *Для того чтобы* $F(x) \in K$, *необходимо и достаточно, чтобы его характеристическая функция* $f(t)$ *имела вид*

$$f(t) = \prod_{r=1}^{\infty}\left[(1-2it\mu_r)^{-1/2}e^{-it\mu_r}\right]\exp\left\{-2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{a_r^2\mu_r^2}{1-2it\mu_r}-\frac{\sigma^2t^2}{2}+itm\right\}, \tag{3}$$

где вещественные параметры μ_r, a_r, σ, m *удовлетворяют условиям:* $\sum_{r=1}^{\infty}\mu_r^2<\infty$,

$\sum_{r=1}^{\infty}a_r^2\mu_r^2<\infty$, $0\leqslant\sigma<\infty$.

Доказательство теоремы распадается на несколько лемм.

Лемма 1. *Законы класса* K *и только они являются предельными для законов распределения случайных величин*

$$\zeta_n=\sum_{r=1}^{n}\lambda_r(\xi_r+m_r)^2-A_n, \tag{4}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *— независимые нормальные случайные величины с параметрами* $(0,1)$, *а* $\lambda_r=\lambda_r^{(n)}$, $m_r=m_r^{(n)}$, A_n *— вещественные параметры.*

Доказательство. Как известно, две квадратичные формы можно привести к диагональному виду одним линейным преобразованием, если одна из этих квадратичных форм положительно определена. Используя это обстоятельство, мы можем одним линейным преобразованием привести R к единичной матрице (несобственные распределения надо рассматривать в пространстве меньшего числа измерений), а матрицу Q — к диагональной матрице с элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Таким образом, для любой нормированной и центрированной случайной величины $\frac{\widetilde{\zeta}_n-\widetilde{A}_n}{B_n}$ можно подобрать такие λ_r, m_r и A_n, что случайная величина ζ_n будет иметь то же самое распределение. Отсюда вытекает утверждение леммы.

В дальнейшем мы будем говорить, что ζ_n *удовлетворяет условию сходимости*, если при $n\to\infty$ закон распределения ζ_n слабо сходится, т. е.

$$\mathbf{P}\{\xi_n<x\}\Rightarrow F(x), \tag{5}$$

где $F(x)$ — функция распределения.

Лемма 2. *Если* ζ_n *удовлетворяет условию сходимости, то при любом* n $\sum_{r=1}^{n}\lambda_r^2\leqslant C$, $\sum_{r=1}^{n}m_r^2\lambda_r^2\leqslant C$, *где* $C<\infty$.

Доказательство. Если случайная величина ξ нормально распределена с параметрами $(0,1)$, то случайная величина $(\xi+m)^2$ распределена по закону нецентрального χ^2 с одной степенью свободы; характеристическая функция этого закона имеет вид

$$f(t,\ m)=(1-2it)^{-1/2}\exp\left\{\frac{m^2}{2}\left[(1-2it)^{-1}-1\right]\right\}. \tag{6}$$

Из (4) и (6) получаем характеристическую функцию ζ_n

$$f_{\zeta_n}(t)=\prod_{r=1}^{n}f(\lambda_r t,\ m_r)\,e^{-itA_n}=$$

$$=\prod_{r=1}^{n}(1-2i\lambda_r t)^{-1/2}\exp\left\{\sum_{r=1}^{n}\left[\frac{m_r^2}{2}(1-2i\lambda_r t)^{-1}-1\right]-itA_n\right\}.$$

В силу условия сходимости $|f_{\zeta_n}(t)|^2 \to |f(t)|^2$ при $n \to \infty$, где $f(x)$ — характеристическая функция предельного закона $F(x)$. Если бы по какой-нибудь подпоследовательности $n' \to \infty$ $\sum_{r=1}^{n'} \lambda_r^2 \to \infty$ или $\sum_{r=1}^{n'} m_r^2 \lambda_r^2 \to \infty$, то при $t \neq 0$

$$|f_{\zeta_n}(t)|^2 = \sum_{r=1}^{n'} (1+4t^2\lambda_r^2)^{-1} \exp\left\{-\sum_{r=1}^{n'} \frac{4m_r^2\lambda_r^2 t^2}{1+4\lambda_r^2 t^2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left[4t^2 \sum_{r=1}^{n} \lambda_r^2\right]^{-1} \exp\left\{-4t^2 \sum_{r=1}^{n} m_r^2 \lambda_r^2\right\} \to 0,$$

что невозможно. Лемма доказана.

В дальнейшем для простоты будем предполагать, что все $\lambda_r \geqslant 0$. Перенумеруем λ_r в порядке убывания: $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ (в случае, когда имеются λ_r разных знаков, надо отдельно нумеровать положительные $\lambda_1'' \geqslant \lambda_2' \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{n_1}' \geqslant 0$ и отрицательные $\lambda_1'' \leqslant \lambda_2'' \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n_2}'' < 0$ и применить нижеследующие рассуждения отдельно к λ_r' и λ_r'').

Лемма 3. *Если ζ_n удовлетворяет условию сходимости и при $n \to \infty$ $\lambda_r \to \mu_r$, $m_r \to a_r$ (если $\mu_r \neq 0$), $c_n = \sum_{r=1}^{n} 2\lambda_r^2 (1+2m_r^2) - \sum_{r=1}^{\infty} 2\mu_r^2 (1+2a_r^2) \to \sigma^2$, то характеристическая функция предельного закона $F(x)$ имеет вид (3), а $A_n = -m + \sum_{r=1}^{n} \lambda_r (1+m_r^2) + o(1)$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что ряды $\sum_{r=1}^{\infty} \mu_r^2$ и $\sum_{r=1}^{\infty} a_r^2 \mu_r^2$ сходятся. Далее, легко видеть, что предел $\sigma^2 \geqslant 0$. Поскольку по условию при $n \to \infty$ $\lambda_r \to \mu_r$, то полагая $\lambda_r = \mu_r + \delta_r$, получаем $\delta_r \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что $\delta_r \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по r. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $\mu_r \downarrow 0$, то мы можем выбрать такое N, что $\mu_N < \frac{\varepsilon}{3}$. Выберем $n_1 > N$ так, чтобы при всех $n \geqslant n_1$ $|\delta_N| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда при этих n и $r \geqslant N$ $\lambda_r \leqslant \lambda_N < \mu_N + |\delta_N| < \frac{2\varepsilon}{3}$. Отсюда следует, что при $r \geqslant N$ и $n \geqslant n_1$ $|\delta_r| \leqslant \lambda_r + \mu_r < \varepsilon$. Выберем n^2 таким, чтобы при $n \geqslant n^2$ $|\delta_r| < \varepsilon$ для $r = 1, 2, \ldots, N$. Таким образом, $|\delta_r| < \varepsilon_n$ при $n \geqslant \max(n_1, n_2)$ для всех r. Далее покажем, что $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \mu_r |\delta_r| = 0$. Поскольку $|\delta_r| \leqslant \mu_r + \lambda_r$, $\sum_{r=1}^{n} \lambda_r^2 \leqslant C$ и $\sum_{r=1}^{\infty} \mu_r^2 < \infty$, то мы можем выбрать такое N, что

$$\sum_{r=N+1}^{n} \mu_r |\delta_r| \leqslant \sum_{r=N+1}^{n} \mu_r (\mu_r + \lambda_r) \leqslant \sum_{r=N+1}^{n} \mu_r^2 + \sqrt{\sum_{r=N+1}^{n} \mu_r^2 \sum_{r=N+1}^{\infty} \lambda_r^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех n; конечную сумму $\sum_{r=1}^{N} \mu_r |\delta_r|$ можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ при $n > n_0$, поэтому $\sum_{r=1}^{n} \mu_r |\delta_r| < \varepsilon$ при $n > n_0$. Из только что доказанного соотношения следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sum_{r=1}^{n} \lambda_r^2 - \sum_{r=1}^{n} \mu_r^2 - \sum_{r=0}^{n} \delta_r^2\right] = 0. \tag{7}$$

Характеристическая функция ε_n с $A_n = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r (1 + m_r^2)$ имеет следующий вид

$$f_{\zeta_n}(t) = \sum_{r=1}^{n} \left[(1 - 2it\lambda_r)^{-1/2} e^{-it\cdot\lambda_r} \right] \exp\left\{ - \sum_{r=1}^{n} \frac{2m_r^2\lambda_r^2 t^2}{1 - 2it\lambda_r} \right\}. \tag{8}$$

Рассмотрим отдельно множители $\prod_{r=1}^{n} \left[(1 - 2it\lambda_r)^{-1/2} e^{-it\lambda_r} \right]$ и $\exp\left\{ - \sum_{r=1}^{n} \frac{2m_r^2\lambda_r^2 t^2}{1 - 2it\lambda_r} \right\}$.

Первый множитель (8) представим в следующем виде:

$$\prod_{r=1}^{n} \left[(1 - 2i\lambda_r t)^{-1/2} e^{-r\lambda_r t} \right] =$$

$$= \prod_{r=1}^{n} \left[(1 - 2i\mu_r t)^{-1/2} e^{-it\mu_r} \right] \prod_{r=1}^{n} \left[(1 - 2i\sigma_r t)^{-1/2} e^{-it\delta_r} \right] (1 + \varepsilon_n), \tag{9}$$

где $1 + \varepsilon_n = \left[\prod_{r=1}^{n} \left(1 + \frac{4t^2\mu_r\delta_r}{(1 - 2it\mu_r)(1 - 2it\delta_r)} \right) \right]^{-1/2}$. Легко видеть, что $\varepsilon_n \to 0$, так как

$$\log |(1 + \varepsilon_n)| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \log \left| 1 + \frac{4t^2\mu_r\delta_r}{(1 - 2it\mu_r)(1 - 2it\delta_r)} \right| \leqslant 2t^2 \sum_{r=1}^{n} |\mu_r| \, |\delta_r| \to 0.$$

Подставляя в (9) выражение

$$\prod_{r=1}^{n} [(1 - 2i\delta_r t)^{-1/2} e^{-it\delta_r t}] = \exp\left\{ -t^2 \sum_{r=1}^{n} \delta_r^2 \right\} (1 + o(1)) =$$

$$= \exp\left\{ -\frac{t^2}{2} \sum_{r=1}^{n} 2(\lambda_r^2 - \mu_r^2) \right\} (1 + o(1)),$$

получаем

$$\prod_{r=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 - 2i\lambda_r t}} e^{-i\lambda_r t} = \prod_{r=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2i\mu_r t}} e^{-i\mu_r t} \right] \exp\left\{ -t^2 \sum_{r=1}^{n} (\lambda_r^2 - \mu_r^2) \right\} (1 + o(1))]. \tag{10}$$

Логарифм второго множителя (8) можно представить в следующем виде:

$$-2t^2 \sum_{r=1}^{n} \frac{m_r^2\lambda_r^2}{1 - 2it\lambda_r} = -2t^2 \sum_{r=1}^{n} \frac{a_r^2\mu_r^2}{1 - 2it\mu_r} -$$

$$-2t^2 \sum_{r=1}^{n} \frac{m_r^2\lambda_r^2 - a_r^2\mu_r^2 + 2it\lambda_r a_r^2\mu_r^2 - 2it\mu_r m_r^2\lambda_r^2}{(1 - 2it\lambda_r)(1 - 2it\mu_r)} =$$

$$= -2t^2 \sum_{r=1}^{n} \frac{a_r^2\mu_r^2}{1 - 2it\mu_2} - \frac{t^2}{2} \sum_{r=1}^{n} 4(m_r^2\lambda_r^2 - a_r^2\mu_r^2) + o(1). \tag{11}$$

Из (8), (10) и (11) следует, что

$$f_{\zeta_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\prod_{r=1}^{\infty} (1 - 2i\mu_r t) e^{2i\mu_r t}}} \exp\left\{ -2t^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r^2\mu_r^2}{1 - 2it\mu_r} \right\} e^{-\frac{t^2}{2}\sigma^2} (1 + o(1)),$$

откуда получается утверждение леммы.

Лемма 4. *Если ζ_n удовлетворяет условию сходимости, то существуют пределы* $\lim_{n\to\infty}\lambda_r$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\lambda_r^2(1+2m_r^2)$; *для тех номеров r, для которых* $\lim_{n\to\infty}\lambda_r\neq 0$, *существуют также пределы* $\lim_{n\to\infty} m_r$.

Доказательство. В силу леммы 2 при каждом r величины λ_r ограничены, и для тех номеров r, для которых $\lim_{n\to\infty}|\lambda_r|>0$, m_r ограничены. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда можно выбрать (применяя диагональный процесс) такие две подпоследовательности $n'\to\infty$ и $n''\to\infty$, что при $n'\to\infty$ $\lambda_r\to\mu_r'$, $m_r\to a_r'$ (если $\mu_r'\neq 0$) и $2\sum_{r=1}^{n}(\lambda_r^2+2m_r^2\lambda_r^2)-2\sum_{r=1}^{\infty}\mu_r^2(1+2a_r^2)\to\sigma'^2$, а при $n''\to\infty$ $\lambda_r\to\mu_r''$, $m_r\to a_r''$ (если $\mu_r''\neq 0$) и $2\sum_{r=1}^{n}\lambda_r^2(1+2m_r^2)-2\sum_{r=1}^{\infty}\mu_r^2(1+2a_r^2)\to\sigma''^2$. Отсюда вытекает (в силу леммы 3), что предельная характеристическая функция представима в виде (3) с двумя разными наборами параметров (μ_r, a_r, σ') и $(\mu_r'', a_r'', \sigma'')$, а это невозможно. Лемма 4, а вместе с ней и теорема доказаны.

Колмогоров А. Н. Замечание к докладу Б. А. Севастьянова

Из формулы Б. А. Севастьянова вытекает, что распределения класса K, за исключением вырожденного, определяются плотностями вероятности, аналитическими, кроме, может быть, одной точки. Элементарные примеры показывают, что они могут быть одно- и двухвершинными. Но уже, например, вопрос о том, может ли иметь их плотность три, или более максимумов, остается пока открытым.

Заседание 30 ноября.

Колмогоров А. Н., О некоторых работах Проблемной Лаборатории теории вероятностей и статистических методов (Kolmogorov A. N., Some Studies at the Problem Laboratory on Probability Theory and Statistical Methods).

Заседание 7 декабря.

Беляев Ю. К., О непрерывности и дифференцируемости реализаций гауссовских процессов (Beljaev Yu. K., On the Continuity Differentiability of Gaussian Process Realizations).

Пусть $\xi(t)$ — гауссовский сепарабельный процесс, принимающий действительные значения с корреляционной функцией $r(t,s)=\mathbf{M}\,\xi(t)\,\xi(s)$. В стационарном случае $r(t,s)=r(t-s)$. Без ограничения общности считаем $\mathbf{M}\,\xi(t)=0$, $r(t,t)=1$. Так как все n-мерные распределения гауссовских процессов определяются корреляционной функцией, то встает задача отыскания необходимых и достаточных условий для непрерывности выборочных функций, выраженных в терминах корреляционной функции процесса. До настоящего времени эта задача еще не решена.

Для стационарных гауссовских процессов была доказана альтернатива [1], утверждающая, что либо почти все выборочные функции неограничены на любом интервале конечной длины, либо почти все выборочные функции непрерывны. В несколько ослабленной форме подобная альтернатива была получена ранее Р. Л. Добрушиным [2]. Хотя необходимых и достаточных условий для непрерывности выборочных функций нет, есть отдельно достаточные условия для выполнения каждой из двух альтернатив. Так для стационарных гауссовских процессов доказано [1], [3], что условия

$$\int_0^{\infty}[\ln(1+\lambda)]^{1+\varepsilon}\,dF(\lambda)<\infty \quad\text{или}\quad \mathbf{M}\,|\xi(t+h)-\xi(t)|^2\leqslant\frac{c}{|\ln|h||^{1+\varepsilon'}},$$

$(\varepsilon,\varepsilon')>0$, достаточны для непрерывности выборочных функций (здесь $F(\lambda)$ — спектраль-

ная функция процесса $\xi(t)$). Эти условия нельзя улучшить существенным образом. Действительно, если для $\xi(t)$ существует спектральная плотность $f(\lambda) \geqslant \frac{c}{\lambda (\ln \lambda)^2}$ $(\lambda \geqslant \lambda_0 > 0)$ или если корреляционная функция $r(t)$ выпукла в некоторой окрестности нуля $0 < t < \varepsilon$, и $\mathbf{M} \mid \xi(t+h) - \xi(t) \mid^2 \geqslant \frac{c}{\mid \ln \mid h \mid \mid}$, то почти все выборочные функции таких процессов будут неограничены на любом конечном интервале. Возможно, что необходимые и достаточные условия для выполнения каждой из альтернатив можно выразить в виде сходимости или расходимости некоторых интегралов. По-видимому, не существует непрерывных, с вероятностью единица, гауссовских процессов, для которых $r(t) < \frac{c}{\mid \ln \mid t \mid \mid}$ при всех достаточно малых t. В качестве гипотезы можно, выдвинуть следующее более общее предположение: если $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — гауссовские процессы с такими корреляционными функциями, что для $t_1, t_2 \in (a, b)$ $\mid r_1(t_1 t_2) \mid \leqslant \mid r_2(t_1, t_2) \mid$, $r_1(t_1, t_1) = r_2(t_1, t_1) = 1$, то

$$\mathbf{P}\{\sup_{t \in (a,b)} \mid \xi_1(t) \mid > x\} \geqslant \mathbf{P}\{\sup_{t \in (a,b)} \mid \xi_2(t) \mid > x\}.$$

Условие

$$\mid r(t, t+h) - r(t, t) \mid \leqslant \frac{c}{\mid \ln \mid h \mid \mid^{3+\varepsilon}}, \qquad \varepsilon > 0; t, t+h \in [a, b]$$

достаточно для непрерывности выборочных функций нестационарных гауссовских процессов, его можно получить, используя метод А. Н. Колмогорова [4]. По-видимому, это условие можно существенно усилить, заменив 3 на 1.

Следующим вопросом является изучение свойств модуля непрерывности выборочных функций на интервале в каждой точке. Если $\xi(t)$ — стационарный гауссовский процесс, а $\varphi(n) > 0$, $h/\varphi(n) \to 0$, то с вероятностью единица

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{\varphi(n)} = \zeta \geqslant 0, \qquad \zeta = \text{const}.$$

Примером построения нетривиальных $\varphi(h)$, для которых $0 < \varphi < \infty$, может служить следующее утверждение Ханта [3]: если для спектральной плотности имеет место неравенство

$$\frac{c_1^2}{\lambda^{2-\beta}} < f(\lambda) < \frac{c_2^2}{\lambda^{2-\beta}}, \quad -1 < \beta < +1, \quad 0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty,$$

то для каждого t, с вероятностью единица,

$$c_1 \widetilde{K}_\beta \leqslant \overline{\lim_{h \to 0}} \frac{\mid \xi(t+h) - \xi(t) \mid}{\mid h \mid^{\frac{1-\beta}{2}} \left(\ln \ln \frac{1}{\mid h \mid} \right)^{1/2}} \leqslant c_2 \widetilde{K}_\beta,$$

где $\widetilde{K}_\beta^2 = \frac{2\pi \sin \beta \frac{\pi}{2}}{\Gamma(2-\beta) \sin \beta\pi}$. Другие типы асимптотики спектральной плотности пока не исследовались. В работе [1] были изучены равномерные свойства модуля непрерывности типа условий Гельдера. Например, если

$$\int_0^\infty \lambda^{2\alpha} \ln(1+\lambda)\, dF(\lambda) < \infty,$$

то на любом конечном интервале $[a, b]$ для любого $c > 0$

$$|\xi_1(t') - \xi(t'')| \leqslant c\,|t' - t''|^{\alpha}.$$

В случае нестационарных гауссовских процессов для выполнения условий Гельдера с показателем α достаточно, чтобы было

$$\mathbf{M}\,|\xi(t+h) - \xi(t)|^2 \leqslant \frac{c\,|h|^{2\alpha}}{|\ln|h||}.$$

Одной из основных задач в этом направлении является отыскание условий, выраженных в терминах корреляционных или спектральных функций, необходимых и достаточных для того, чтобы произвольная функция $f(t)$ была локально верхней, т. е. такой что

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{h\to 0}}\,\frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{f(h)} < 1\right\} = 1,$$

или равномерно верхней на интервале $\Delta = [a, b]$, т. е. такой, что

$$\mathbf{P}\left\{\sup_t \overline{\lim}\,\frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{f(h)} < 1\right\} = 1.$$

Заметим, что в силу альтернативы об ограниченности или неограниченности выборочных функций для стационарных гауссовских процессов, эта задача не менее сложна, чем задача отыскания необходимых и достаточных условий для непрерывности выборочных функций.

Для брауновского движения необходимые и достаточные условия для верхних функций были получены И. Г. Петровским [5]. Два стационарных не дифференцируемых в среднем квадратичном гауссовских процесса $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ оказываются взаимно сингулярными [6], если

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\,\frac{\mathbf{M}\,|\xi_1(t+h) - \xi_1(t)|^2}{\mathbf{M}\,|\xi_2(t+h) - \xi_2(t)|^2} > 1.$$

Сингулярность является следствием различных локальных свойств выборочных функций. По-видимому, это условие достаточно для взаимной сингулярности и нестационарных гауссовских процессов. Естественно, встает вопрос о том, всегда ли взаимная сингулярность мер двух гауссовских процессов на конечном интвале является следствием локальных свойств траекторий, или взаимная сингулярность мер двух гауссовских процессов на интервале Δ не всегда влечет взаимную сингулярность на любом интервале $\Delta' \subset \Delta$?

Для абсолютной непрерывности выборочных функций необходима и достаточна дифференцируемость процесса в среднем квадратичном [7]. Если процесс дифференцируем в среднем квадратичном, но не дифференцируем с вероятностью единица, то при условии, что $\xi(t) = \xi$, $\xi'(t) = \xi'$, почти все выборочные функции пересекают бесконечное число раз обе стороны положительного угла с вершиной в точке ξ и биссектрисой, тангенс которой равен ξ' [6]. По-видимому, такой угол всегда будет прямым. Эти вопросы связаны с числом пересечений уровня выборочными функциями гауссовских процессов, для аналитичности которых необходимо и достаточно, чтобы корреляционная функция была аналитической (подробнее см. [6], [8]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. К. Беляев, Локальные свойства выборочных функций стационарных гауссовских процессов, Теория вероят. и ее примен., V, 1 (1960), 128—131.

[2] Р. Л. Добрушин, Свойства непрерывности выборочных функций стационарных гауссовских процессов, Теория вероятн. и ее примен., V, 1 (1960), 132—134.

[3] G. A. Hunt, Random Fourier transforms, Trans. Amer. Math. Soc., 71, (1951), 38—69. (Русский перевод см. сборник Математика 2:6 (1958), 87—114).

4] E. E. Sludsky, Alkuni proposizioni sulla theoria degli funzioni aleatorie, grorn. Inst. Ital. Attuari, 8 (1937), 183—199. (русский перевод см. Труды Сред. Аз. университета, серия математика (5), 31 (1939), 3—15).
5] И. Г. Петровский, Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung, Comp. math., 1 (1935), 383—419.
6] Ю. К. Беляев, Локальные свойства выборочных функций стационарных гауссовских процессов (кандидатская диссертация), Математич. ин-т, АН СССР, 1959.
7] G. J. Doob, The elementary Gaussian processes, Ann. Math. Stat, **V**, 15 (1944), 229—282.
8] Ю. К. Беляев, Аналитические случайные процессы, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 4 (1959), 437—444.

Колмогоров А. Н., Дынкин Е. Б. в ходе обсуждения доклада Ю. К. Беляева отмечают, что представляет интерес изучение строения σ-алгебры $\mathfrak{M}(t+0)$ и входящей во все σ-алгебры $\mathfrak{M}(t-\Delta t,\ t+\Delta t)$, порождаемые значениями гауссовского процесса $\xi(s)$, $t-\Delta t \leqslant s \leqslant t+\Delta t$.

Колмогоров А. Н., Экспериментальный метод оценки энтропии речи (Kolmogorov A. N., An Experimental Method of Evaluating the Entropy of Speech).

Боровков А. А., О распределении максумума последовательных сумм случайных величин (Borovkov A. A., On the Distribution of the Maximum for Secuential Sums of Stochastic Quantities).

Рассматриваются одинаково распределенные независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ удовлетворяющие условиям:

I. Условию Крамера: при некотором $H>0$ характеристическая функция $f(\lambda)=\mathbf{M}e^{i\lambda\xi_k}$ регулярна в полосе $|\operatorname{Im}\lambda|<H$.

II. $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \sup |f(\lambda)| < 1$.

Изучаются распределение максимума $\overline{s_n}$ сумм $s_1=\xi_1, \ldots, s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$ и ряд других задач, связанных с этим распределением. Сформулируем один из результатов, относящийся к асимптотическим разложениям вероятности $\mathbf{P}(\overline{s_n}<x)$ в случае $\mathbf{M}\xi_k=0$.

Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ определяет случайное блуждание частицы на прямой с величиной k-го скачка, равной ξ_k. Обозначим n_x время первого прохождения частицы через барьер x $(\overline{s}_{n_x-1}<x,\ s_{n_x}\geqslant x$ при положительном $x)$: $\chi_x=s_{n_x}-x$.

Допустим, что при некотором $\alpha\geqslant 0$ существует

$$\lim_{x\to+\infty}\mathbf{P}(\chi_x<t \mid n_x=\alpha(x))=\varphi_\alpha(t), \tag{1}$$

где $\alpha(x)$ — любая положительная целочисленная функция, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha(x)}{x}=\dfrac{1}{\alpha}$. Тогда положим, по определению $\chi_+^{(\alpha)}$,

$$\mathbf{P}(\chi_+^{(\alpha)}<t)=\varphi_\alpha(t).$$

Распределение $\chi_+^{(0)}$ совпадает с безусловным предельным распределением χ_x: $\varphi_0(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{P}(\chi_x<t)$.

Справедлива следующая

Теорема. *В условиях* I — II.

1. *При достаточно малом* $\alpha\geqslant 0$ *существует собственное предельное распределение* (1).

2. $$\mathbf{P}(\overline{s_n}<u\sqrt{\mathbf{D}\xi_k n})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^u e^{-t^2/2}\,dt\left\{1+\sum_{j=1}^{l-1}Q_j(u)\,n^{-j/2}+O(n^{-l/2})\right\}.$$

Здесь l произвольно, коэффициент $Q_j(u)$ не зависит от n и определяется $j+2$ мо ментами ξ_k и совокупностью параметров $\frac{d^{2k}}{d\alpha^{2k}}\mathbf{M}(\chi_+^{(\alpha)})^s\big|_{\alpha=0}$ при $k \geqslant 0$, $s \geqslant 1$, таких что $2k+s \leqslant j$. Число последних равно $\frac{(j+1)^2}{4}$, если j нечетно и $\frac{(j+2)j}{4}$, если четно.

Найден алгоритм вычисления коэффициентов $Q_j(u)$.

Сформулируем также лемму, с помощью которой может быть найдено распределе ние $\chi_+^{(\alpha)}$. В силу условия I при положительном $z \leqslant 1$, достаточно близком к 1, функция $1 - zf(\lambda)$ будет иметь два мнимых нуля: $\lambda_1(z)$ и $\lambda_2(z)$. Положим

$$T(\lambda, z) = \frac{(1 - zf(\lambda))\,T(z)}{(\lambda - \lambda_1(z))(\lambda - \lambda_2(z))},$$

где функция $T(z) = \frac{\lambda_1(z)\lambda_2(t)}{1-z}$ регулярна при $z = 1$, $T(1) = \frac{2}{\mathbf{D}\xi_k}$.

Лемма. 1. *Функция $T(\lambda, z)$ при z, достаточно близком к 1, представима в виде*

$$T(\lambda, z) = T_{+1}(\lambda, z)\,T_-(\lambda, z), \qquad (2$$

где функции $T_\pm(\lambda, z)$ регулярны соответственно в областях $-h < \operatorname{Im}\lambda < \infty$, $-\infty <$ $< \operatorname{Im}\lambda < h$ при некотором $h > 0$, не равны нулю в конечных точках этих областей и яв ляются преобразованиями Фурье некоторых абсолютно интегрируемых функций. Пред ставление (2) однозначно, если положить $T_+(0, z) = 1$, и может быть найдено с по мощью аналитических формул.

2. *При достаточно малом α*

$$\mathbf{M}e^{i\lambda\chi_+^{(\alpha)}} = T_+(\lambda, z_\alpha),$$

где $z_\alpha = \frac{1}{f(\lambda(\alpha))}$, $\lambda(\alpha)$ — точка мнимой оси, в которой достигается $\min f(\lambda)e^{-i\lambda\alpha}$.

Отметим, что если вместо положительного рассматривать отрицательный барьер $x < 0$ и аналогично предыдущему определить случайную величину $\chi^{(\beta)}$ (например, $\mathbf{P}(\chi_-^{(\beta)} < t) = \lim_{x\to-\infty}\mathbf{P}(\chi_x < t)$), то утверждение леммы можно было бы дополнить следу ющим: *при достаточно малом β*

$$Me^{i\lambda\chi^{(\beta)}} = T_-(\lambda, z_\beta), \text{ где } z_\beta = \frac{1}{f(\lambda(\beta))},\ f(\lambda(\beta))e^{i\lambda(\beta)\beta} = \min_{\operatorname{Re}\lambda=0} f(\lambda)e^{i\lambda\beta}.$$

В условиях Крамера утверждение леммы является обобщением результатов автора, от носящихся к распределениям $\chi_\pm^{(0)}$ и получающихся из леммы, если положить $z = 1$ $\alpha = \beta = \lambda_1(1) = \lambda_2(1) = 0$).

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и в технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва, В—234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the latter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics.

Технический редактор *Е. И. Гришина*

Подписано к печати 30/VII-1961 г. Тираж 2635 экз. Зак. 3849
Формат бум. 70×108 1/16 Печ. л. 10,27 Бум. л. 3 3/4 Уч.-изд. л. 11,4

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

Цена 1р. 13 к.

ПЭК 9

ГИТК ВТБ

9 1.12 ТЕОР